×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

ناشر

مکتبہ سعیدیہ ○ اُردو بازار ○ لاہور

برائے

پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ، لاہور

اپیل

پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ ایک قومی ادارہ ہے جو پنجاب کے طلبہ کے لیے معیاری اور سستی نصابی کُتب بروقت مہیا کرنے کے لیے کوشش کرتا ہے۔ مگر کچھ جعل ساز ناجائز منافع کے لیے بورڈ کی شائع کردہ کُتب کے جعلی ایڈیشن گھٹیا کاغذ پر ناقص طباعت کے ساتھ مارکیٹ میں فروخت کرنے کی کوشش کرتے ہیں اور بورڈ کو مالی نقصان پہنچانے کے علاوہ اس کی بدنامی کا سبب بھی بنتے ہیں۔ طلبہ اور والدین سے توقع کی جاتی ہے کہ ایسی کُتب کی اطلاع بورڈ کو دیں تاکہ ضروری سدِّباب کیا جا سکے۔ بورڈ کی نصابی کتابوں کی نشاندہی بورڈ کے اس نشانِ خصوصی سے ہوتی ہے جو ہر کتاب کے سرورق پر چھپا ہوتا ہے۔

سیّد فضل حسین

چیئرمین

پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ

21 - ای - 2 - گلبرگ - 3 - لاہور

آٹھویں جماعت کے لیے

ناشر

مکتبہ سعیدیہ ○ اُردُو بازار ○ لاہور

برائے

پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ، لاہور

تاریخ اشاعت	ایڈیشن	بار	تعداد
جنوری 1991ء	اوّل	ششم	33,000

تیار کردہ : پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ، لاہور
منظور کردہ و نظر ثانی شدہ : قومی ریویو کمیٹی، وزارتِ تعلیم، حکومت پاکستان

مصنفین :

- پروفیسر ثناء اللہ بھٹی
- سیّد امیر حسین نقوی
- شمشاد محمد لودھی
- شیخ محمد اختر احمد
- ڈاکٹر خواجہ غلام کبریا
- ڈاکٹر اکبر علی
- خالد سلیم

مدیران :

- پروفیسر مظہر حسین ملک
- مقصود رضا احمد

نگران :

- فہیم حسین

طابع : محمد اویس

رولینڈ پرنٹرز، سنت نگر، لاہور فون، 67879

فہرست

ضروری اطلاع برائے اساتذہ / طلبہ

وزارتِ تعلیم (شعبہ نصاب) کی ہدایات بموجب چٹھی نمبر MATHS 3/1/83 کے پیش نظر کتاب ہٰذا میں حسابی جملوں / عبارات کو بائیں سے دائیں لکھّا گیا ہے۔ لہٰذا اساتذہ کرام سے گذارش ہے کہ بچّوں کو پڑھاتے وقت تمام حسابی جملوں / عبارات کو بائیں سے دائیں پڑھیں اور تحریر فرمائیں۔ اِس سلسلے میں اگر بہتری کی کوئی صُورت ممکن ہو تو ازراہِ کرم بورڈ کو اپنی قیمتی رائے سے نوازیں۔

پنجاب ٹیکسٹ بُک بورڈ

لاہور

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم ہ

باب 1

سیٹ (Set)

ساتویں جماعت میں ہم پڑھ چکے ہیں کہ مکمل وضاحت کیے ہوتے مختلف اشیا یا اعداد کے اجتماع کو سیٹ کہتے ہیں۔ سیٹوں کو عام طور پر انگریزی کے بڑے حروفِ تہجیّ A, B, C, D, وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور خالی سیٹ کے لیے علامت { } استعمال ہوتی ہے جب کہ سیٹ کے رُکن ہونے کی علامت $\in$ ہے اور رُکن نہ ہونے کی علامت $\notin$ ہے۔

اب ہم سیٹ کے متعلق مزید پڑھتے ہیں۔

1.1 تحتی سیٹ (Sub set)

مثال 1

$$A = \{1,3,5\} \quad , \quad B = \{1,2,3,4,5\}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ سیٹ A کے ارکان 1,3,5 سیٹ B کے بھی ارکان ہیں۔

ایسی صورت میں سیٹ A کو سیٹ B کا تحتی سیٹ کہتے ہیں اسے علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں۔ $A \subseteq B$

تحتی سیٹ کی مزید وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 2

$$A = \{2,4,6,8,10,12\} \quad , \quad B = \{6,8,12\}$$

6,8,12 سیٹ B کے ارکان ہیں اور سیٹ B کا ہر ایک رُکن سیٹ A میں موجود ہے اِس لیے سیٹ B تحتی سیٹ ہے سیٹ A کا

یعنی $B \subseteq A$

مثال: 3

$$A=\{a,b,c\} \quad , \quad B=\{a,b,c,d,e\}$$

a,b,c سیٹ A کے ارکان ہیں اور اِس سیٹ کا ہر رُکن سیٹ B میں موجود ہے۔ پس سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔

اگر کسی سیٹ X کا ہر ایک رُکن سیٹ Y کا بھی رُکن ہو تو سیٹ X کو سیٹ Y کا تحتی سیٹ کہتے ہیں اور اسے علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں۔ $X \subseteq Y$

مثال: 4

$$A=\{1,2,3\} \quad , \; B=\{1,2,3,4,5\}$$

$$C=\{2,4,5\}$$

1,2,3 سیٹ A کے ارکان ہیں جبکہ

2,4,5 سیٹ C کے ارکان ہیں۔

(i) سیٹ A کے تمام ارکان سیٹ B میں موجود ہیں۔

(ii) سیٹ C کے تمام ارکان سیٹ B میں موجود ہیں۔

لہٰذا سیٹ A اور سیٹ C تحتی سیٹ ہیں سیٹ B کے۔ انھیں علامتی طور پر $A \subseteq B$ اور $C \subseteq B$ لکھتے ہیں۔

نوٹ : اگر سیٹ A تحتی سیٹ ہو سیٹ B کا تو سیٹ B کو سیٹ A کا فوقی سیٹ (سپُر سیٹ) کہتے ہیں اور B فوقی سیٹ ہے A کا، کو علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں۔

$$B \supset A$$

مثال: 5

$$P=\{2,4,6\}, \quad Q=\{0,4,6,8\}$$

سیٹ P کے دو ارکان 4,6
سیٹ Q میں موجود ہیں۔ جبکہ سیٹ P کا رُکن 2 سیٹ Q میں موجود
نہیں ہے لہٰذا سیٹ P سیٹ Q کا تحتی سیٹ نہیں ہے۔
اِس بات کو علامتی طور پر $P \not\subseteq Q$ لکھا جاتا ہے۔

1.2 واجب تحتی سیٹ (Proper Sub Set)

مثال : 1

$C = \{3,5,11\}, \quad D = \{1,3,5,7,11\}$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$3 \in C \ , \ 3 \in D$

$5 \in C, \ , \ 5 \in D$

$11 \in C, 11 \in D$

یعنی سیٹ C کا ہر ایک رُکن سیٹ D کا بھی رُکن ہے۔
اِس لیے سیٹ C سیٹ D کا تحتی سیٹ ہے۔
چونکہ سیٹ D کے ارکان 1,7
سیٹ C میں شامل نہیں ہیں ایسی صورت میں سیٹ C کو سیٹ D کا
واجب تحتی سیٹ کہتے ہیں۔ اِسے علامتی طور پر $C \subset D$ لکھتے ہیں۔

مثال : 2

$N = \{1,2,3,4, \ldots\}, \qquad W = \{0,1,2,3,4, \ldots\}$

ہم دیکھتے ہیں کہ سیٹ N کا ہر ایک رُکن سیٹ W کا بھی رُکن ہے۔
یعنی سیٹ N سیٹ W کا تحتی سیٹ ہے۔
چونکہ 0 سیٹ W کا رُکن ہے لیکن سیٹ N کا رُکن نہیں ہے اِس لیے
سیٹ N سیٹ W کا واجبی تحتی سیٹ ہے۔

یعنی $N \subset W$

مثال 3

$P = \{5,7,15\}$

$Q = \{3,5,7,11,15\}$

سیٹ P کا ہر ایک رُکن سیٹ Q کا بھی رُکن ہے یعنی
سیٹ P تحتی سیٹ ہے سیٹ Q کا۔چونکہ
3, 11 سیٹ Q کے ارکان ہیں لیکن سیٹ P کے ارکان نہیں ہیں۔
اِس لیے سیٹ P سیٹ Q کا واجب تحتی سیٹ ہے۔
یعنی $P \subset Q$

> اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو اور سیٹ B کا کم از کم ایک رُکن سیٹ A میں موجود نہ ہو تو سیٹ A کو سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ کہتے ہیں۔

خالی سیٹ 'ϕ' ہر سیٹ کا تحتی سیٹ مانا جائے گا۔

مثال 4

{3,13} کے تمام واجب تحتی سیٹ لکھیے۔

حل:

{3,13} کے واجب تحتی سیٹ مندرجہ ذیل ہوں گے۔

$\Phi, \{3\}, \{13\}$

مثال 5

اگر

$A = \{ 1, 2, 3 \}$

تو سیٹ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ لکھیے۔

حل:

سیٹ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ اگلے صفحہ پر دیکھیے۔

$\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\},$
$\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

1.3 غیر واجب تحتی سیٹ (Improper Sub Set)

تعریف کے مطابق ہر سیٹ اپنا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

مثلاً $A \subseteq A$
لیکن سیٹ A اپنے آپ کا واجب تحتی سیٹ نہیں ہے لہٰذا اِسے غیر واجب تحتی سیٹ کہتے ہیں۔

1.۵ مساوی سیٹ (Equal Sets)

$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{c, b, d, a\}$
یہاں سیٹ A تحتی سیٹ ہے سیٹ B کا اور سیٹ B تحتی سیٹ ہے سیٹ A کا۔
یعنی

$A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$

ایسی صورت میں سیٹ A اور سیٹ B مساوی سیٹ کہلاتے ہیں۔ مساوی سیٹوں کو علامتی طور پر $A = B$ لکھتے ہیں۔

مشق 1.1

1. مندرجہ ذیل دو سیٹوں کے درمیان خالی جگہوں کو علامت $\subseteq$ یا $\nsubseteq$ سے پُر کیجئے۔

(i) $\{0\}$ --- $\{-1, 0\}$

(ii) $\{1, 3, 4\}$ --- $\{2, 3, 4\}$

(iii) $\{2, 3, 5\}$ --- $\{1, 2, 3, 4\}$

(iv) $\{\ \}$ --- $\{0\}$

(v) { 1, 2, 3, 4, --- } --- { 0, 1, 2, 3, 4, 5, --- }

2۔ خالی جگہوں پر مناسب الفاظ لکھیے۔

(i) سیٹ { 1, 3 } --- سیٹ ہے سیٹ { 1, 2, 3 } کا

(ii) سیٹ { 0 } اور سیٹ { } دو --- سیٹ ہیں۔

(iii) خالی سیٹ ہر ایک سیٹ کا --- ہوتا ہے۔

(iv) ہر ایک سیٹ اپنا ہی --- سیٹ ہوتا ہے۔

(v) { a, b, c } اور { b, c, a } باہم ---- سیٹ ہیں۔

3۔ مندرجہ ذیل میں سے کون کون سے جوڑے میں سیٹ A تحتی سیٹ ہے سیٹ B کا۔

(i) A = { 1, 3, 5, 7 } , B = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

(ii) A = { -2, -1, 0, 1, 2 }, B = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

(iii) A = { 2, 4, 8, 16 }, B = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }

(iv) A = { 0, 1, 2, 3, --- }, B = تمام قدرتی اعداد کا سیٹ

4۔ مندرجہ ذیل سیٹوں کے غیر واجب تحتی سیٹ بتایئے۔

(i) A = { 4, 8, 12, 16 }

(ii) B = { -3, -1, 1, 3, 5 }

(iii) C = { 2, 4, 6, 8, 10, 12 }

(iv) D = { 0, 1, 2, 3, --- }

(v) E = { 3, 6, 9, 12, --- }

5۔ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کے تین واجب تحتی سیٹ لکھیے۔

(i) A = { 1, 3 }
(ii) B = { 0, 4, 8 }

(iii) C = { 1, 3, 5, 7 }
(iv) D = { 4, 5, 6, 7, 8 }

(v) E = { 2, 3, 5, 7, 11, --- }

6۔ مندرجہ ذیل سیٹوں کے تمام واجب تحتی سیٹ لکھیے۔

(i) A = { }
(ii) B = { 0 }
(iii) C = { 1, 2 }

(iv) D = { 4, 5, 6, 7 } , (v) E = { a, b, c, d }

7- مندرجہ ذیل سیٹوں کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ لکھیے۔

(i) Φ (ii) A = { 1 } (iii) B = { 5 } (iv) C = { -7 }

(v) D = { -2, 2 } (vi) E = { 4, 16 } (vii) F = { -3, 9 }

(viii) G = { 2, 3, 5 } (ix) H = { -4, -16, -64 } (x) P = { -6, -4, -2 }

8- مندرجہ ذیل میں باہم مساوی سیٹوں کی نشاندہی کیجیے۔

(i) A = { 1, 2, 3, --- }

(ii) B = { 2, 4, 6, 8, 10 }

(iii) C = { 1, 2, 3 }

(iv) D = تمام مثبت جفت اعداد کا سیٹ

(v) E = { 3, 4, 12 }

(vi) F = تمام قدرتی اعداد کا سیٹ

(vii) G = { 4, 6, 10, 8, 2 }

(viii) H = پہلے چار قدرتی اعداد کا سیٹ

(ix) J = { 2, 4, 6, 8, 10, --- }

(x) K = { 2, 1, 3 }

1.5 قوّت سیٹ (POWER SET)

مثال : 1

A = { 10, 20 }

حل : سیٹ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ مندرجہ ذیل ہیں۔

Φ ,{ 10 }, { 20 }, { 10, 20 }

سیٹ A کے تمام تحتی سیٹوں کا سیٹ

= { Φ, { 10 }, { 20 }, { 10, 20 } }

مندرجہ بالا سیٹ کو سیٹ A کا قوّت سیٹ کہتے ہیں اور اسے علامتی طور

پر P (A) لکھتے ہیں۔

کسی سیٹ کا قوّت سیٹ وہ سیٹ ہوتا ہے۔ جو دیے ہوے سیٹ کے تمام تحتی سیٹوں پر مشتمل ہو۔

مثال: 2

اگر B = { 1, 2, 3 } تو P (B) معلوم کیجیے۔

حل:

{ 1, 2, 3 } کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ مندرجہ ذیل ہیں۔

Φ, { 1 }, { 2 }, { 3 }, { 1, 2 }, { 1, 3 }, { 2, 3 }, { 1, 2, 3 }

لہٰذا

P (B) ={Φ { 1 }, { 2 }, { 3 }, { 1, 2 }, { 1, 3 }, { 2, 3 }, { 1, 2, 3 }}

مشق 1.2

مندرجہ ذیل سیٹوں کے قوّت سیٹ لکھیے۔

1- A ={ }
2- B ={ 0 }
3- C ={ 2 }
4- D ={ 1, 4 }
5- E ={ 1, 6 }
6- F ={ -1, 1 }
7- G ={ 2, -2 }
8- H ={ 2, 0, 4 }
9- I = { 3, -3, 5 }
10- J ={ -1, -2 -3 }

11۔ ثابت کیجیے کہ خالی سیٹ کا قوّت سیٹ خالی نہیں ہوتا۔

1.6 یونیورسل سیٹ (Universal Set)

یونیورسل سیٹ سے مراد ایسا سیٹ ہے جو کسی زیرِ غور مسئلہ سے تعلق رکھنے والے تمام ارکان پر مشتمل ہو۔
یونیورسل سیٹ کو عموماً علامت U سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلاً

اگر آٹھویں جماعت کے بچوں سے متعلق بات ہو رہی ہو تو یونیورسل سیٹ آٹھویں جماعت کے بچوں پر مشتمل ہوگا۔ اگر 1 سے 100 تک اعداد سے متعلق بات ہو رہی ہو تو یونیورسل سیٹ پہلے سو قدرتی اعداد پر مشتمل ہوگا۔ یعنی

$$U = \{ 1, 2, 3, ---, 100 \}$$

1.7 دو سیٹوں کا تقاطع (Intersection of Two Sets)

ساتویں جماعت میں ہم پڑھ آئے ہیں کہ اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو سیٹ A اور سیٹ B کے مشترک ارکان کا سیٹ، سیٹ A اور سیٹ B کا تقاطع سیٹ کہلاتا ہے۔ اسے علامتی طور پر $A \cap B$ لکھتے ہیں۔
اعادہ کے لیے مندرجہ ذیل مثالیں دیکھیے۔

مثال : 1

اگر

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}, \ B = \{ 2, 3, 5, 7 \}$$

تو $A \cap B$ معلوم کیجیے۔

حل :

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}, \ B = \{ 2, 3, 5, 7 \}$$

$$A \cap B = \{ 1, 2, 3, 4 \} \cap \{ 2, 3, 5, 7 \}$$

$$= \{ 2, 3 \}$$

مثال : 2

اگر

$A = \{1, 2, 3, --- , 10\}$, $B = \{2, 4, 6, --- , 20\}$

تو $A \cap B$ معلوم کیجیے۔

حل :

$A = \{1, 2, 3, --- , 10\}$, $B = \{2, 4, 6, --- , 20\}$

$A \cap B = \{1, 2, 3, --- , 10\} \cap \{2, 4, 6, --- , 20\}$

$= \{2, 4, 6, 8, 10\}$

مثال : 3

اگر

$X = \{2, 4, 6, 8, ---\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7, ---\}$

تو $X \cap Y$ معلوم کیجیے۔

حل :

$X = \{2, 4, 6, 8, ---\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7, ---\}$

$X \cap Y = \{2, 4, 6, 8, ---\} \cap \{1, 3, 5, 7, ---\}$

$= \{\ \}$

1.8 دو سیٹوں کا یونین (Union of Two Sets)

ساتویں جماعت میں ہم پڑھ آتے ہیں کہ اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو سیٹ A اور سیٹ B کا یونین ان ارکان پر مشتمل ہوگا جو سیٹ A میں شامل ہوں یا سیٹ B میں شامل ہوں یا سیٹ A اور سیٹ B دونوں میں شامل ہوں۔

A یونین B کو علامتی طور پر $A \cup B$ لکھتے ہیں۔

اعادہ کے لیے اگلے صفحہ پر دی گئی مثالیں دیکھیے۔

مثال: 1

اگر

$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$

تو $A \cup B$ معلوم کیجیے۔

حل:

$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 5, 7\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

مثال: 2

اگر

$A = \{1, 2, 3, ---, 10\}, \quad B = \{2, 4, 6, ---, 20\}$

تو $A \cup B$ معلوم کیجیے۔

حل:

$A = \{1, 2, 3, ---, 10\}, \quad B = \{2, 4, 6, ---, 20\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, ---, 10\} \cup \{2, 4, 6, ---, 20\}$

$= \{1, 2, 3, 4, ---, 10, 12, 14, ---, 20\}$

مثال: 3

اگر

$X = \{2, 4, 6, 8, ---\}, \quad Y = \{1, 3, 5, 7, ---\}$

تو $X \cup Y$ معلوم کیجیے۔

حل:

$X = \{2, 4, 6, 8, ---\}, \quad Y = \{1, 3, 5, 7, ---\}$

$X \cup Y = \{2, 4, 6, 8, ---\} \cup \{1, 3, 5, 7, ---\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ---\}$

نوٹ: دو سیٹوں کے یونین میں مشترک ارکان کو صرف ایک مرتبہ لکھا جاتا ہے۔

مثال: 4

اگر

$C = \{ 2, 3, 5, 7, 11 ---\}$, $D = \{ 1, 2, 3, 4, 5, --- \}$

تو $C \cap D$ اور $C \cup D$ معلوم کیجیے۔

حل:

$C = \{ 2, 3, 5, 7, 11, --- \}$, $D = \{ 1, 2, 3, 4, 5, --- \}$

$C \cap D = \{ 2, 3, 5, 7, 11, --- \} \cap \{ 1, 2, 3, 4, 5, --- \}$

$= \{ 2, 3, 5, 7, 11, --- \}$

$= C$ ———— (i)

$C \cup D = \{ 2, 3, 5, 7, 11, --- \} \cup \{ 1, 2, 3, 4, 5, --- \}$

$= \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, --- \}$

$= D$ ———— (ii)

ہم دیکھتے ہیں کہ

$C \subseteq D$, $C \cap D = C$, $C \cup D = D$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

اگر دو سیٹ A اور B ایسے ہوں کہ $A \subseteq B$ تو

$A \cap B = A$, $A \cup B = B$

1.9 دو سیٹوں کا فرق (Difference of Two Sets)

ساتویں جماعت میں ہم پڑھ آتے ہیں کہ اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو A فرق B سے مراد ایسے ارکان پر مشتمل سیٹ ہوگا جو سیٹ A میں تو شامل ہوں مگر سیٹ B میں شامل نہ ہوں۔

دو سیٹوں کے فرق کو علامتی طور پر

$A \setminus B$ یا $A - B$ لکھتے ہیں۔

مثال : 1

اگر

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}, \quad B = \{ 2, 3, 5, 7, 11 \}$

تو A - B اور B - A معلوم کیجیے۔

حل :

$A = \{ 1, 2, 3\ 4, 5 \}, B = \{ 2, 3, 5, 7, 11 \}$

$A - B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} - \{ 2, 3, 5, 7, 11 \}$

$= \{ 1, 4 \}$

$B - A = \{ 2, 3, 5, 7, 11 \} - \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$= \{ 7, 11 \}$

مثال : 2

اگر

$G = \{ a, b, g, h \}, H = \{ a, b, c, d, e, f \}$

تو G - H اور H - G معلوم کیجیے۔

حل :

$G = \{ a, b, g, h \}, H = \{ a, b, c, d, e, f \}$

$G - H = \{ a, b, g, h \} - \{ a, b, c, d, e, f \}$

$= \{ g, h \}$

$H - G = \{ a, b, c, d, e, f \} - \{ a, b, g, h \}$

$= \{ c, d, e, f \}$

مثال : 3

اگر

$A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, --- \}, B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, --- \}$

تو A - B اور B - A معلوم کیجیے۔

حل:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10 --- \}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, --- \}$

$A - B = \{2, 4, 6, 8, 10 --- \} - \{1, 2, 3, 4, 5, --- \}$

$= \{ \}$

$B - A = \{1, 2, 3, 4, 5, --- \} - \{2, 4, 6, 8, 10, --- \}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, --- \}$

مثال: 4

اگر

$A = \{4, 6, 8, 9, 10, --- \}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, --- \}$

تو $A - B$ اور $B - A$ معلوم کیجیے۔

حل:

$A = \{4, 6, 8, 9, 10 --- \}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, --- \}$

$A - B = \{4, 6, 8, 9, 10, --- \} - \{2, 3, 5, 7, 11, --- \}$

$= \{4, 6, 8, 9, 10, --- \}$

$B - A = \{2, 3, 5, 7, 11, --- \} - \{4, 6, 8, 9, 10 --- \}$

$= \{2, 3, 5, 7, 11, --- \}$

1.10 سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of a Set)

ساتویں جماعت میں ہم پڑھ آتے ہیں کہ اگر U ایک یونیورسل سیٹ ہو اور سیٹ A سیٹ U کا تحتی سیٹ ہو تو سیٹ U - A کو سیٹ A کا کمپلیمنٹ سیٹ کہتے ہیں اور اسے A' سے ظاہر کرتے ہیں۔ A' سے مُراد ایسے ارکان پر مشتمل سیٹ ہے جو سیٹ U میں تو شامل ہوں مگر سیٹ A میں شامل نہ ہوں۔ خیال رہے کہ سیٹ A اور A' کا یونین یونیورسل سیٹ ہوگا۔

$$A \cup A' = U$$

اور A, A' کا تقاطع سیٹ خالی سیٹ ہوگا۔

یعنی $A \cap A' = \Phi$

مثال 1:

اگر

$U = \{1, 2, 3, 4, ---, 20\}, A = \{2, 4, 6, 8, ---, 20\}$

تو ثابت کیجیے کہ

$A \cup A' = U, A \cap A' = \Phi$

حل:

$U = \{1, 2, 3, 4, ---, 20\}, A = \{2, 4, 6, 8, ---, 20\}$

$U - A = A' = \{1, 2, 3, 4, ---, 20\} - \{2, 4, 6, 8, ---, 20\}$

$= \{1, 3, 5, 7, --- 19,\}$

$A \cup A' = \{2, 4, 6, 8, ---, 20\} \cup \{1, 3, 5, 7, ---, 19\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ---, 20\}$

$= U$

$A \cap A' = \{2, 4, 6, 8, ---, 20\} \cap \{1, 3, 5, 7, ---, 19\}$

$= \{\ \}$

$= \Phi$

مشق 1.3

1 مندرجہ ذیل میں $A \cap B$، $B \cap A$، $A \cup B$ اور $B \cup A$ معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ

$A \cup B = B \cup A$ اور $A \cap B = B \cap A$

(i) $A = \{1, 2, 3, ---, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, ---, 19\}$

(ii) $A = \{2, 4, 6, ---, 20\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, ---, 32\}$

(iii) A = { 0, 2, 4, 6,--- , 16 } , B = { 0, 1, 2, 3, --- , 15 }

(iv) A = { 2, 3, 5, 7, --- } , B = { 1, 2, 3, 4, --- }

(v) A = { 0, ± 1, ± 2, ± 3, --- } , B = { - 1, - 2, - 3, - 4, --- }

(vi) A = تمام مکمّل اعداد کا سیٹ , B = تمام جفت صحیح اعداد کا سیٹ

2 - مندرجہ ذیل میں C - D اور D - C معلوم کیجیے۔

(i) C = { - 1, - 3, - 5, ---, -15 }, D = { - 2, - 4, - 6, --- , - 16 }

(ii) C = { 3, 6, 9, --- , 24 } , D = { 5, 10, 15, --- , 35 }

(iii) C = { 1, 4, 7, 10, --- , 19 } , D = { 2, 6, 10, 14, --- , 22 }

(iv) C = { 0, 1, 2, 3, --- } , D = { 1, 3, 5, 7, --- }

(v) C = { 1, 2, 3, 4, --- } , D = { 0, ± 1, ± 2, ± 3, --- }

(vi) C = تمام مثبت طاق صحیح اعداد کا سیٹ D = { ± 1, ± 3, ± 5, --- }

3 - مندرجہ ذیل میں A ∩ B ، A U B ، A - B اور B - A معلوم کیجیے۔

(i) A = { 2, 4, 6, --- , 18 } , B = { 1, 2, 3, --- , 12 }

(ii) A = { 1, 3, 5, --- , 23 } , B = { 2, 4, 6, --- , 24 }

(iii) A = { 1, 2, 3, --- , 20 } , B = { - 1, - 2, - 3, --- , - 20 }

(iv) A = { 1, 3, 5, 7, 9, --- } , B = { 2, 3, 5, 7, 11, --- }

(v) A = { 1, 2, 3, 4, --- } , B = { - 2, - 4, - 6, --- }

(vi) A = { 2, 4, 6, 8, --- } , B = تمام مثبت جفت اعداد کا سیٹ

4

اگر U = { 0, 2, 4, 6, --- , 40 }

تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے کمپلیمنٹ سیٹ معلوم کیجیے۔

(i) A = { 0, 2, 4, 6, 8 } (ii) B = { 10, 12, 14, --- , 20 }

(iii) C = { 0, 4, 8, 12, --- , 40 } (iv) D = { 2, 6, 10, 14, --- , 30 }

(v) E = { 4, 12, 20, 28, 36 } (vi) F = { 0, 2, 4, 6, --- , 40 }

5 - اگر

$A = \{1, 3, 5, ---, 49\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, ---, 50\}$

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, ---, 47\}$

تو A' , B' , $A' - B$, $A - B'$, $A' \cup B'$, $A \cap B'$, $A' \cap B'$

$B' \cap A'$, $(A \cup B)'$ اور $(A \cap B)'$ معلوم کیجیے۔

6- Φ کا کمپلیمنٹ سیٹ بتایے۔

7- ثابت کیجیے کہ

(a) $A - B = A \cap B'$ (b) $B - A = B \cap A'$

(c) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (d) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

جبکہ

(i) $U = \{1, 2, 3, 4, ---, 100\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, ---, 50\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, ---, 100\}$

(ii) U = تمام قدرتی اعداد کا سیٹ

$A = \{5, 10, 15, 20, ---\}$

$B = \{10, 20, 30, 40, ---\}$

باب 2

ناطق اعداد

(RATIONAL NUMBERS)

2.1 صحیح اعداد یا سمتی اعداد (INTEGERS OR DIRECTED NUMBERS)

چھٹی جماعت میں ہم پڑھ چکے ہیں کہ

+ 1, + 2, + 3, ---

کو مثبت سمتی اعداد کہتے ہیں اور

− 1, −2, −3, ---

کو منفی سمتی اعداد کہتے ہیں جب کہ صفر نہ مثبت عدد ہے اور نہ ہی منفی
اَب مندرجہ ذیل سیٹوں پر غور کیجیے۔
مثبت سِمتی اعداد کا سیٹ

$= \{ +1, +2, +3, --- \}$

منفی سِمتی اعداد کا سیٹ

$= \{ -1, -2, -3, --- \}$

عدد صفر پر مشتمل سیٹ

$= \{ 0 \}$

مندرجہ بالا تینوں سیٹوں کا یونین لینے سے جو سیٹ حاصل ہوتا ہے اگر ہم اُسے I سے ظاہر کریں تو

$I = \{ +1, +2, +3, --- \} \cup \{ 0 \} \cup \{ -1, -2, -3, --- \}$

$= \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, --- \}$

سیٹ I کو صحیح اعداد کا سیٹ بھی کہتے ہیں اور اعداد

$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ---$

کو صحیح اعداد کہتے ہیں اکثر اوقات مثبت سمتی اعداد کو بغیر + کی علامت کے

بھی لکھا جاتا ہے۔
مثلاً 5 + کو صرف 5 لکھیں گے۔

2.2 اعداد کی مطلق قیمت (ABSOLUTE VALUE OF NUMBERS)

اعداد کی مطلق قیمت کو اِس طرح بیان کیا جاتا ہے۔

(i) مثبت عدد کی مطلق قیمت وہی مثبت عدد ہوتا ہے مثلاً 3 + کی مطلق قیمت 3 ہے۔

(ii) منفی عدد کی مطلق قیمت اُس عدد کا مخالف عدد ہوتا ہے مثلاً 2 - کی مطلق قیمت 2 ہے۔

(iii) صفر کی مطلق قیمت صفر ہوتی ہے۔

مطلق قیمت کے لیے علامت "| |" استعمال ہوتی ہے۔

چنانچہ

$$|0| = 0$$

$$|+6| = 6$$

$$|-4| = 4$$

اِسی طرح اگر n مثبت یا صفر عدد ہو تو

$$|n| = n$$

اگر n منفی عدد ہو تو

$$|n| = -n$$

یاد رہے کہ اگر n غیر منفی عدد ہو تو

$$|+n| = |-n| = n$$

پس

ہر ایک صحیح عدد کی مطلق قیمت ہمیشہ ایک غیر منفی عدد ہوتی ہے۔

2.3 سمتی اعداد کی جمع (ADDITION OF DIRECTED NUMBERS)

سمتی اعداد کی جمع کی مختلف صورتوں کی وضاحت عددی شعاع کی مدد سے ظاہر کی گئی ہے۔

مثال : 1

6 + اور 4 + کا حاصل جمع معلوم کرنا۔

-2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11 +12

x' 0 x

+4

(4 +) + (6 +) کو پڑھیں گے "مثبت چھ جمع مثبت چار"
(4 +) + (6 +) کو معلوم کرنے کے لیے ہم عدد 6 + کے نشان سے 4 اکائیاں دائیں طرف چلتے ہیں اور اس طرح 10 + پر پہنچ جاتے ہیں (یاد رہے کہ عددی خط پر دائیں سمت مثبت ہے اور بائیں سمت منفی) پس معلوم ہوا کہ

$$(+6) + (+4) = +10 = 10 \quad \text{----} \quad \text{(i)}$$

مثال : 2

(4 -) + (6 +) کا حاصل جمع معلوم کرنا۔

-4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8

x' 0 x

-4

(4 -) + (6 +) کو معلوم کرنے کے لیے ہم 6 + کے نشان سے شروع کرکے 4 اکائیاں فاصلہ بائیں طرف چلتے ہیں اور اس طرح 2 + پر پہنچ جاتے ہیں پس

$$(+6) + (-4) = +2 = 2 \quad \text{----} \quad \text{(ii)}$$

مثال: 3

$(+4)+(-6)$ کا حاصلِ جمع معلوم کرنا۔

$(-6)+(+4)$ کو معلوم کرنے کے لیے ہم 6 - کے نشان سے شروع کرکے 4 اکائیاں فاصلہ دائیں طرف طے کرتے ہیں اور 2 - پر پہنچ جاتے ہیں۔ پس

$$(-6)+(+4)=-2 \text{ --- (iii)}$$

مثال: 4

$(-4)+(-6)$ کا حاصلِ جمع معلوم کرنا۔

$(-4)+(-6)$ کو حل کرنے کے لیے ہم 6 - کے نشان سے شروع کرکے 4 اکائیاں فاصلہ بائیں طرف طے کرتے ہیں اور 10 - پر پہنچ جاتے ہیں۔ لہٰذا معلوم ہوا کہ

$$(-6)+(-4)=-10 \text{ ---- (iv)}$$

اب ہم مثال 1 تا 4 کے نتائج کو دوبارہ اکٹھا لکھتے ہیں۔

$$(+6)+(+4)=+10 \text{ --- (i)}$$

$$(+6)+(-4)=+2 \text{ --- (ii)}$$

$$(-6)+(+4)=-2 \text{ --- (iii)}$$

$$(-6)+(-4)=-10 \text{ --- (iv)}$$

اِن نتائج کو دیکھنے سے ہمیں دو عددوں کے جمع کرنے کے لیے مندرجہ ذیل اصُول حاصل ہوتے ہیں۔

(i) اگر دونوں اعداد مثبت یا دونوں منفی ہوں تو اِن کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے ان کی مطلق قیمتوں کو جمع کر لیا جاتا ہے اور مجموعے سے پہلے وہی علامت لگا دی جاتی ہے

جو اُن کی مشترک علامت

(نتائج (i) اور (iv) کی رُو سے)۔

(ii) اگر ایک عدد مثبت اور دوسرا منفی ہو تو ان کی مطلق قیمتوں کا فرق لیا جاتا ہے اور اِس فرق کے ساتھ بڑی مطلق قیمت والے عدد کی علامت لگا دی جاتی ہے

(نتائج (ii) ، (iii) کی رُو سے)۔

2.4 سمتی اعداد کی تفریق (SUBTRACTION OF DIRECTED NUMBERS)

مثال : 1

عددی شعاع کی مدد سے $(+7) - (+3)$ معلوم کرنا۔

علامت " + " کی طرح علامت " - " بھی دو معنوں میں استعمال ہوتی ہے۔ وحدانی عمل کے طور پر اور ثنائی عمل کے طور پر

$(+7) - (+3)$ کو پڑھیں گے۔

مثبت 7 نفی مثبت 3

قدرتی اعداد کی جمع کے سلسلہ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$9 - 4 = 5$ کیونکہ $4 + 5 = 9$

ہم تسلیم کریں گے کہ یہی اصُول سمتی اعداد کی تفریق میں بھی کام دے گا۔

اِس اصول کے مطابق $(+7)$ اور $(+3)$ کا حاصِل تفریق سمتی عدد ' X ' ہو گا بشرطیکہ $(+3) + X$ کا حاصِل جمع $+7$ ہو۔

لہٰذا X کو معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھیں گے کہ عددی شعاع پر $+3$ سے شروع کر کے کتنی اکائیاں کس طرف چلا جائے کہ $+7$ پر پہنچ جائیں۔

ظاہر ہے اِس کے لیے ہمیں 4 اکائیاں دائیں طرف چلنا ہو گا۔

پس $X = +4$

یعنی $(+7) - (+3) = +4$ --- (1)

مثال: 2

$(+7) - (-3)$ معلوم کیجیے۔

ہمیں معلوم کرنا ہے کہ 3- سے کس طرف اور کتنا چلیں کہ 7+ پر پہنچ جائیں۔

-4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8

X′ 0 X

+10

شکل سے ظاہر ہے کہ اس کے لیے ہم کو دائیں طرف 10 اکائیاں چلنا پڑے گا

پس

$(+7) - (-3) = +10$ --- (2)

مثال: 3

$(-7) - (+3)$ معلوم کیجیے۔

ہمیں دیکھنا ہے کہ 3+ سے شروع کر کے کتنا اور کس طرف چلیں کہ 7- پر پہنچ جائیں۔

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5

X′ 0 X

-10

ظاہر ہے کہ اس کے لیے ہمیں 10 اکائیاں بائیں طرف چلنا ہوگا۔ لہٰذا

$(-7) - (+3) = -10$ --- (3)

مثال: 4

$(-7) - (-3)$ معلوم کیجیے۔

ہمیں عددی شعاع کی مدد سے یہ دیکھنا ہے کہ 3- سے شروع کر کے کتنا اور کس طرف چلا جائے کہ 7- پر پہنچ جائیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ اس کے لیے ہمیں 4 اکائیاں

-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4

X′ -4 0 X

بائیں طرف چلنا ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ

$$(-7)\ (-3) = -4 \text{ --- } (4)$$

اُوپر کی مثالوں سے ہمیں تفریق کے عمل کے لیے کوئی ایسا سادہ سا اصُول حاصل نہیں ہوتا جیسا کہ جمع کے لیے ہوا تھا۔ تاہم ہم ابھی دیکھیں گے کہ تفریق کے عمل کو آسانی سے جمع کے عمل میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ اس کے لیے ذیل کے نتائج پر غور کیجیے۔

I	II
$(+7)-(+3) = +4,$	$(+7)+(-3) = +4$
$(+7)-(-3) = +10,$	$(+7)+(+3) = +10$
$(-7)-(+3) + -10,$	$(-7)+(-3) = -10$
$(-7)-(-3) = -4,$	$(-7)+(+3) = -4$

نتائج I اور II کے تقابل سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک سمتی عدد سے دوسرے سمتی عدد کو تفریق کرنا ہو تو پہلے عدد کو دوسرے عدد کے مخالف عدد میں جمع کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصِل ہو جاتا ہے یعنی۔
اگر a اور b کوئی سے دو سمتی اعداد ہوں تو

$$\boxed{a - b = a + (-b)}$$

چنانچہ

$$(+20)-(+12) = (+20)+(-12)$$
$$= +8$$
$$(+20)-(-12) = (+20)+(+12)$$
$$= +32$$
$$(-20)-(+12) = (-20)+(-12)$$
$$= -32$$
$$(-20)-(-12) = (-20)+(+12)$$
$$= -8$$

پس

> ایک صحیح عدد میں سے دوسرے صحیح عدد کو تفریق کرنے کے لیے،
> دوسرے صحیح عدد کی علامت بدل کر دونوں کا مجموعہ معلوم کریجیے۔

(یہ اصول عملی کام میں اکثر استعمال ہوتا ہے)

2.5 سمتی اعداد کی ضرب (MULTIPLICATION OF DIRECTED NUMBERS)

سمتی اعداد کی ضرب کے لیے پہلے ہم مکمل اعداد کی ضرب کا مندرجہ ذیل جدول بناتے ہیں۔

×	5	4	3	2	1	0	
5	25	20	15	10	5	0	پہلی قطار کے ہر عدد کو 5 سے ضرب دی۔
4	20	16	12	8	4	0	پہلی قطار کے ہر عدد کو 4 سے ضرب دی۔
3	15	12	9	6	3	0	پہلی قطار کے ہر عدد کو 3 سے ضرب دی۔
2	10	8	6	4	2	0	پہلی قطار کے ہر عدد کو 2 سے ضرب دی۔
1	5	4	3	2	1	0	پہلی قطار کے ہر عدد کو 1 سے ضرب دی۔
0	0	0	0	0	0	0	پہلی قطار کے ہر عدد کو صفر سے ضرب دی۔

(جدول 1)

جدول سے ظاہر ہے کہ ہر قطار میں اعداد ایک خاص اصول کے تحت بڑھ رہے ہیں یا کم ہو رہے ہیں۔ مثلاً

(ا) دُوسری قطار کے اعداد مندرجہ ذیل ہیں۔

25, 20, 15, 10, 5, 0 (بائیں سے دائیں طرف)

ہر دو متصلہ اعداد کا فرق 5 ہے۔

★ 25	20	15	10	5	0
	↓	↓	↓	↓	↓
	(25 - 5)	(20 - 5)	(15 - 5)	(10 - 5)	(5 - 5)

قطار ★ کا ہر عدد بالترتیب جدول' 1 ' کی پہلی قطار کے اعداد 0, 1, 2, 3, 4, 5 کو 5 سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے اسی لیے دو متصلہ اعداد کا فرق 5 ہے۔جدول' 1 ' کی تیسری قطار میں مندرجہ ذیل اعداد ہیں۔

20 , 16 , 12 , 8 , 4 , 0

(20 - 4) (16 - 4) (12 - 4) (8 - 4) (4 - 4)

ہر دو متصلہ اعداد کا فرق 4 ہے کیونکہ اِس قطار کے اعداد بالترتیب پہلی قطار کے اعداد کو 4 سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔یہی بات کالموں میں بھی موجود ہے۔

مندرجہ بالا اصول کے تحت (جدول 1) کی توسیع کر کے مندرجہ ذیل جدول حاصل کی جاسکتی ہے۔

دوسرا عدد ⟵ ⟶

پہلا عدد (↑↓)

×	5	4	3	2	1	0	- 1	- 2	- 3	- 4	- 5
5	25	20	15	10	5	0	- 5	-10	-15	-20	-25
4	20	16	12	8	4	0	- 4	- 8	-12	-16	-20
3	15	12	9	6	3	0	- 3	- 6	- 9	-12	-15
2	10	8	6	4	2	0	- 2	- 4	- 6	- 8	-10
1	5	4	3	2	1	0	- 1	- 2	- 3	- 4	- 5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
- 1	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5
- 2	-10	- 8	- 6	- 4	- 2	0	2	4	6	8	10
- 3	-15	-12	- 9	- 6	- 3	0	3	6	9	12	15
- 4	-20	-16	-12	- 8	- 4	0	4	8	12	16	20
- 5	-25	-20	-15	-10	- 5	0	5	10	15	20	25

(جدول 2)

وضاحت:

جدول' 2 ' کی دوسری قطار میں بائیں طرف سے صفر تک مندرجہ ذیل اعداد ہیں:

25, 20, 15, 10, 5, 0

جیسا کہ پہلے وضاحت کی جا چکی ہے کہ دو متصلہ اعداد کا فرق 5 ہے۔ اس لیے جب 0 میں سے 5 تفریق کریں گے تو" 5 -" حاصل ہوگا اور" 5-" میں سے 5 تفریق کریں گے تو" 10 -" حاصِل ہوگا۔ جیسا کہ ہم تفریق کے عمل سے جانتے ہیں۔ یعنی

$$0 - 5 = - 5$$

$$- 5 - 5 = - 10$$

$$- 10 - 5 = - 15$$

$$- 15 - 5 = - 20$$

$$- 20 - 5 = - 25$$

مندرجہ بالا عمل سے ڈوسری قطار مکمل ہو جاتی ہے۔ یہی صورتِ حال باقی قطاروں کے لیے ہے۔

جدول' 2 ' میں دوسری قطار کا پہلا عدد 25 ہے جو کہ 5 اور 5 کا حاصل ضرب ہے۔

$5 \times 5 = 25$ یا $(+5)\times(+5) = +25$

آخری قطار کا آخری عدد بھی 25 ہے جو کہ " 5 - " اور" 5 - " کا حاصل ضرب ہے۔

$$(-5)\times(-5) = +25$$

اس لیے

$$(+5)\times(+5) = (-5)\times(-5) = +25$$

جدول' 2 ' کی ڈوسری قطار میں دوسرا عدد 20 ہے جو کہ 4 اور 5 کا حاصل ضرب ہے۔

$4 \times 5 = 20$ یا $(+4)\times(+5) = +20$

آخری قطار کا آخر سے دوسرا عدد بھی 20 ہے جو کہ "5 -" اور "4 -" کا حاصل ضرب ہے۔

$$(-5)\times(-4)=+20$$

اس لیے

$$(+4)\times(5)=(-4)\times(-5)=+20$$

نتیجہ: (I) دو مثبت یا دو منفی سمتی اعداد کا حاصل ضرب مثبت سمتی عدد ہوگا۔

$$(+a)\times(+b)=(-a)\times(-b)=+ab$$

جب کہ a اور b کی قیمتیں مثبت سمتی اعداد ہوں۔

مثلاً

$$(+14)\times(+20)=+(14\times20)=+280$$

$$(-4)\times(-25)=+(4\times25)=+100$$

جدول 2 میں چوتھی قطار کا آخری عدد 15 - ہے جو کہ 3 اور 5 - کا حاصل ضرب ہے۔

$$(3)\times(-5)=-15$$

آخری قطار میں تیسرا عدد بھی (15 -) ہے جو کہ (5 -) اور (3) کا حاصل ضرب ہے۔

$$(-5)\times(3)=-15$$

اِس لیے

$$(3)\times(-5)=(-5)\times(3)=-15$$

ضرب کی خاصیتِ مبادلہ سمتی اعداد میں بھی موجود ہے۔

نتیجہ: (II) اگر ایک سمتی عدد مثبت اور دُوسرا منفی ہو تو ان کا حاصلِ ضرب منفی سمتی عدد ہوگا۔

$$(-a)\times(+b)=-ab$$

اور

$$(+a)\times(-b)=-ab$$

مثلاً

$$(-8)\times(+7)=-56$$

اِس خاصیت کو ہم اختصار کی خاطر ضرب ۔تفریق خاصیت کہیں گے۔

مثال : 1 $4(6+2) = 4\times 6 + 4\times 2$

$= 24 + 8 = 32$

مثال : 2 $5\times 56 = 5(50+6)$

$= 250 + 30$

$= 280$

مشق 2.3

1۔ مندرجہ ذیل میں ہر عدد کا جمعی معکوس اور ضربی معکوس بتایئے۔

(i) 1 (ii) 0 (iii) $\frac{11}{12}$ (iv) $-\frac{5}{6}$

(v) $-\frac{16}{15}$ (vi) $\frac{100}{103}$ (vii) $-2\frac{5}{11}$ (viii) 25

2۔ دیے گئے فقرے میں جو خاصیت استعمال ہوئی ہے اُس کا نام بتایئے

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ (ii) $(\frac{2}{5}+\frac{3}{7})+\frac{4}{9}=\frac{2}{5}+(\frac{3}{7}+\frac{4}{9})$

(iii) $(\frac{11}{12}+\frac{9}{10})\times\frac{4}{5}=\frac{11}{12}\times\frac{4}{5}+\frac{9}{10}\times\frac{4}{5}$

(iv) $\frac{50-45}{5}=\frac{50}{5}-\frac{45}{5}$ (v) $\frac{22}{5}-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}(11-4)$

(vi) $(\frac{1}{2}-\frac{5}{6})\times\frac{8}{9}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}-\frac{5}{6}\times\frac{8}{9}$

(vii) $(\frac{-4}{5})\times(\frac{-5}{4})=1$

(viii) $\frac{2}{7}+(\frac{-2}{7})=0$

3۔ دیے گئے جدول میں خالی خانے اِس طرح پُر کیجیے کہ اگر دیے ہوئے سیٹ میں مذکورہ خاصیت موجود ہو تو خانے میں '✓' کا نشان لگایئے ورنہ '×' (جیسا کہ سطر چار میں دِکھایا گیا ہے)

خاصیت	قدرتی اعداد کا سیٹ	مکمل اعداد کا سیٹ	صحیح اعداد کا سیٹ	ناطق اعداد کا سیٹ
بندش بلحاظ جمع				
مبادلہ بلحاظ جمع				
تلازم بلحاظ جمع				
جمعی ذاتی عنصر کا وجود	×	✓	✓	✓
جمعی معکوس کا وجود				
بندش بلحاظ ضرب				
مبادلہ بلحاظ ضرب				
تلازم بلحاظ ضرب				
ضربی ذاتی عنصر کا وجود				
ضربی معکوس کا وجود (سوائے صفر کے اگر موجود ہو)				
ضرب بر جمع خاصیت یا ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع				

4۔ مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{5}{2} \times \frac{-3}{5}$ (ii) $(-\frac{3}{4})\times(-\frac{2}{5})$ (iii) $\frac{8}{9} \div \frac{-2}{3}$

(iv) $\frac{-5}{12} \div \frac{10}{-3}$ (v) $\frac{7}{8} \times \frac{4}{7} \times (-\frac{3}{2})$ (vi) $-\frac{5}{9} \div (\frac{2}{3} \div \frac{1}{2})$

(vii) $(\frac{7}{9} \times \frac{-3}{4}) \div \frac{1}{2}$ (viii) $(-\frac{3}{5}) \div (-\frac{7}{10})$ (ix) $\frac{7}{8} - [\frac{3}{4} - (-\frac{1}{2})]$

(x) $\frac{2}{3} + (\frac{3}{4} - \frac{7}{8})$ (xi) $(2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}) \times (1\frac{1}{8} - 2\frac{1}{4})$

(xii) $(5\frac{1}{3} - 6\frac{2}{3}) \div (7\frac{1}{4} - 2\frac{2}{3})$

5۔ مندرجہ ذیل فقرات کو مکمل کیجیے۔

(i) ناطق اعداد کی تفریق کا عمل خاصیت مبادلہ ---

(ii) ناطق اعداد کا سیٹ بلحاظ تقسیم خاصیت تلازم ---

(iii) قدرتی اعداد کا سیٹ بلحاظ ضرب خاصیت بندش --- مگر بلحاظ تقسیم خاصیت بندش ---

(iv) ناطق اعداد کے سیٹ میں --- کی خاصیت موجود ہے جبکہ یہ خاصیت قدرتی اعداد کے سیٹ اور صحیح اعداد کے سیٹ میں سے کسی میں موجود نہیں۔

(v) ناطق اعداد میں جمعی ذاتی عنصر --- ہے جبکہ ضربی ذاتی عنصر ---

(vi) صفر کا ضربی معکوس اِس واسطے موجود نہیں کہ اِسے کسی بھی عدد سے ضرب دینے سے --- حاصل نہیں ہو سکتا۔

(vii) ناطق اعداد کا سیٹ مندرجہ ذیل سیٹوں کا فوقی سیٹ ہے۔

(a) --- (b) --- (c) ---

باب 3

عددی نظام

(NUMERATION SYSTEM)

3.1 اعشاری نظام (DECIMAL SYSTEM)

اعداد کے جس نظام سے ہم واقف ہیں۔ اسے " اعداد کا اعشاری نظام " کہتے ہیں۔ اِس نظام میں بنیادی علامتیں جنھیں ہندسے کہتے ہیں تعداد میں دس ہیں۔ یہ ہندسے مندرجہ ذیل ہیں۔

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

اعداد صِفر تا نَو کو اِن بنیادی علامتوں یا ہندسوں سے ظاہر کرتے ہیں۔ جو قدرتی اعداد نَو سے بڑے اور سَو سے چھوٹے ہوں انھیں ظاہر کرنے والی عددی علامتیں دو دو ہندسوں پر مشتمل ہوتی ہیں۔ اِسی طرح نِنانوے سے بڑے اور ہزار سے چھوٹے قدرتی اعداد کو ظاہر کرنے کے لئے تین تین ہندسوں والی علامتیں استعمال ہوتی ہیں وغیرہ وغیرہ۔

اب مندرجہ ذیل مساواتوں پر غور کیجیے۔

$$25 = 20 + 5$$
$$= 2 \times 10 + 5$$
$$= 2 \times 10^{1} + 5$$
$$425 = 400 + 20 + 5$$
$$= 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5$$
$$= 4 \times 10^{2} + 2 \times 10^{1} + 5$$
$$6425 = 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5$$
$$= 6 \times 10^{3} + 4 \times 10^{2} + 2 \times 10^{1} + 5$$

نوٹ: 6425 کو مطلوبہ شکل میں لکھنے کا طریقہ

10	6425
10	642 – 5
10	64 – 2
	6 – 4

پس

$$6425_{(10)} = 6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5$$

25 دراصل $2 \times 10^1 + 5$

کی مختصر شکل ہے۔

425 دراصل $4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5$

کی مختصر شکل ہے۔ جبکہ

6425 دراصل

$$6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5$$

کی مختصر شکل ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اُوپر دی گئی مثالوں میں ہر عدد کو 10 کی طاقتوں کے استعمال کی مدد سے ظاہر کیا گیا ہے۔ لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ دس (بمعنی عشر) اعداد کے اعشاری نظام "کی اساس" (بنیاد) ہے۔ باور کیا جاتا ہے کہ اِس نظام کا رواج پانا محض اتفاقی ہے۔ کیونکہ انسان کے ہاتھ میں دس انگلیاں ہوتی ہیں اور پُرانے وقتوں کے لوگ گنتی کرنے کے لیے انگلیاں استعمال کرتے تھے۔ قدیم زمانے میں دنیا کے کئی ملکوں میں ایسے عددی نظام رائج رہے ہیں۔ جن کی اساسیں دس سے مختلف تھیں ہم جانتے ہیں کہ گھڑی کے ڈائل پر گھنٹوں کو ظاہر کرنے والے نشانات تعداد میں بارہ ہوتے ہیں لہٰذا گھنٹوں کو ظاہر کرنے والی سوئی اساس بارہ کے نظام کے تحت چلتی ہے۔ کمپیوٹر میں جو عددی نظام استعمال ہوتا ہے۔ اُس کی اساس "دو" ہوتی ہے۔

ہم یہاں آپ کا تعارف اساس "پانچ" اور اساس "دو" کے عددی نظاموں سے کرائیں گے۔

3.2 اساس پانچ کا نظام (NUMERATION SYSTEM WITH BASE 5)

اساس پانچ کے نظام میں اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے صرف پانچ ہندسوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ ہم انھیں 4 ,3 ,2 ,1 ,0 سے ظاہر کریں گے۔

واضح رہے کہ اِن ہندسوں کے لیے ہم کوئی اور علامت بھی وضع کر سکتے ہیں۔

مختلف اساسوں میں فرق واضح رکھنے کی خاطر ہم ہر عددی علامت کے ساتھ متعلقہ اساس لکھ دیں گے۔ مثلاً $423_{(10)}$ کا مطلب ہے کہ عدد 423 کو اساس دس کے نظام سے لکھا گیا ہے۔ اِسی طرح $303_{(5)}$ اور $101_{(2)}$ سے مراد یہ ہے کہ اعداد 303 اور 101 کو بالترتیب اساس "پانچ" اور اساس "دو" کے لحاظ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

ہم کِسی بھی دیے ہوے عدد کو ایک اساس سے دوسری اساس میں تحویل کر سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ اعشاری نظام کے کِسی عدد کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کرنے کے لیے اس کو '5' کی طاقتوں کے مجموعے کے طور پر لکھتے ہیں۔ (جیسا کہ اِس باب کے شروع میں اعشاری نظام کے اعداد کو '10' کی طاقتوں کے مجموعے کے طور پر لِکھ کر دکھایا گیا ہے۔)

اِس مقصد کے لیے ہم اعشاری نظام میں دیے ہوے عدد کو یکے بعد دیگرے '5' پر تقسیم کرتے جاتے ہیں حتیٰ کہ خارج قسمت 5 سے کم رہ جاتا ہے۔ اِس امر کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:

$9_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

5	9
	1 – 4 →

پس

$$9_{(10)} = 1 \times 5 + 4 = 14_{(5)}$$

مثال 2:

$17_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

5	17
	3 − 2

پس $17_{(10)} = 3 \times 5 + 2 = 32_{(5)}$

نوٹ: واضح رہے کہ ہم $14_{(5)}$ کو "ایک چار اساس پانچ" پڑھیں گے۔

مثال 3:
$58_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

5	58
5	11 − 3
	2 − 1

پس $58_{(10)} = 2 \times 5^2 + 1 \times 5 + 3 = 213_{(5)}$

مثال 4:
$460_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

5	460
5	92 − 0
5	18 − 2
	3 − 3

پس $460_{(10)} = 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 0 = 3320_{(5)}$

نوٹ: چونکہ اساس پانچ کے نظام میں ہندسہ 5 نہیں ہوتا لہٰذا ہمیں $3320_{(5)}$ کی بجائے $3320_{\text{پانچ}}$ لکھنا چاہیئے۔ ہم صرف سہولت کی خاطر $3320_{(5)}$ لکھ رہے ہیں۔ اسی طرح $101_{(2)}$ کو $101_{\text{دو}}$ لکھا جائے گا۔

مثال 5:

حل: $9107_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

5	9107
5	1821 — 2
5	364 — 1
5	72 — 4
5	14 — 2
	2* — 4

پس

$$9107_{(10)} = 242412_{(5)}$$

نوٹ: اساس پانچ کا مطلوبہ عدد لکھنے کے لیے آخری مقام پر آخری خارج قسمت یعنی نشان زدہ *2 لکھیں۔ اس کے بعد تیروں کے مطابق بالترتیب باقیات لکھتے جائیں۔

مندرجہ ذیل حل شدہ مثالوں میں اساس پانچ کے اعداد کو اساس دس کے مترادف اعداد میں تحویل کرنے کے طریقہ کی وضاحت کی جا رہی ہے۔ آسانی کی خاطر ہم اساس دس کے اعداد کے ساتھ اساس نہیں لکھیں گے۔

مثلاً $8_{(10)}$ ، $47_{(10)}$ ، $519_{(10)}$ کو محض 8, 47, 519 لکھیں گے۔

مثال 6:

حل: $14_{(5)}$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

$$14_{(5)} = 1 \times 5 + 4 = 5 + 4 = 9$$

مثال 7:

حل: $43_{(5)}$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

$$43_{(5)} = 4 \times 5 + 3 = 20 + 3 = 23$$

مثال 8:

$301_{(5)}$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$301_{(5)} = 3 \times 5^2 + 0 \times 5 + 1$$
$$= 75 + 0 + 1 = 76$$

مثال 9:

$4213_{(5)}$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$4213_{(5)} = 4 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 1 \times 5 + 3$$
$$= 4 \times 125 + 2 \times 25 + 5 + 3$$
$$= 500 + 50 + 8$$
$$= 558$$

3.3 ثنائی نظام (BINARY SYSTEM)

ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ کمپیوٹر میں اساس دو کا نظام استعمال ہوتا ہے۔ کیونکہ کمپیوٹر بجلی سے چلتا ہے اور برقی رو یا تو اوف (Off) ہوتی ہے یا اون (on)۔ پس کمپیوٹر میں '0' کو اوف اور '1' کو اون کے مطابق لیا جاتا ہے۔

اساس دو کے نظام کا دوسرا نام ثنائی نظام ہے۔

واضح رہے کہ ہم ثنائی نظام میں علامات یا ہندسوں کو 0,1 سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

عدد	علامت	عدد	علامت
صفر	0	چھے	110
ایک	1	سات	111
دو	10	آٹھ	1000
تین	11	نو	1001
چار	100	دس	1010
پانچ	101		

اگلے صفحہ پر اعشاری نظام کے اعداد کو ثنائی نظام کے مترادف اعداد اور ثنائی نظام

کے اعداد کو اعشاری نظام کے مترادف اعداد میں تحویل کرنے کی وضاحت حل شدہ مثالوں سے کی جاتی ہے۔ یاد رہے کہ اعشاری عدد کو ثنائی عدد میں تحویل کرنے کے لیے اعشاری عدد کو بار بار '2' پر تقسیم کرتے جاتے ہیں حتیٰ کہ خارج قسمت 2 سے کم رہ جاتا ہے۔

نوٹ : اعشاری عدد سے مُراد اعشاری نظام کا عدد اور ثنائی عدد سے مُراد ثنائی نظام کا عدد ہے۔

مثال 1 :

$9_{(10)}$ کو ثنائی نظام کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل :

2	9
2	4 — 1 ↑
2	2 — 0 ↑
	1 — 0 →

پس

$$9_{(10)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$
$$= 1001_{(2)}$$

مثال 2 :

$17_{(10)}$ کو اساس دو کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل :

2	17
2	8 — 1 ↑
2	4 — 0 ↑
2	2 — 0 ↑
	1 — 0 →

پس

$$17_{(10)} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$
$$= 10001_{(2)}$$

مثال 3:

$460_{(10)}$ کو مترادف ثنائی عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

2	460
2	230 - 0 ↑
2	115 - 0 ↑
2	57 - 1 ↑
2	28 - 1 ↑
2	14 - 0 ↑
2	7 - 0 ↑
2	3 - 1 ↑
	1 - 1 ↑

پس،

$$460_{(10)} = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4$$
$$+ 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$$
$$= 111001100_{(2)}$$

مثال 4:

$743_{(10)}$ کو ثنائی نظام کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

2	743
2	371 - 1 ↑
2	185 - 1 ↑
2	92 - 1 ↑
2	46 - 0 ↑
2	23 - 0 ↑
2	11 - 1 ↑

2	5 - 1
2	2 - 1
	1 - 0

پس

$743_{(10)} = 1011100111_{(2)}$

مثال 5:

$1001_{(2)}$ کو مترادف اعشاری عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$1001_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$
$$= 8 + 0 + 0 + 1 = 9$$

مثال 6:

$11110001_{(2)}$ کو مترادف اعشاری عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$11110001_{(2)} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$
$$= 128 + 64 + 32 + 16 + 0 + 0 + 0 + 1 = 241$$

اب ہم دس تک اعداد کو اساس پانچ اور اساس دو کے نظاموں میں علامات سے ظاہر کرکے دِکھائیں گے۔

عدد	اساس پانچ کے نظام میں علامت	اساس دو کے نظام میں علامت
صفر	0	0
ایک	1	1
دو	2	10
تین	3	11
چار	4	100
پانچ	10	101
چھے	11	110
سات	12	111
آٹھ	13	1000

نو	14	1001
دس	20	1010

مشق 3.1

1۔ مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو اساس پانچ کے مترادف اعداد میں تحویل کیجیے۔

(i) 8 (ii) 15 (iii) 67
(iv) 109 (v) 287 (vi) 888
(vii) 1234 (viii) 5000 (ix) 9083

2۔ مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو ثنائی نظام کے مترادف اعداد میں تحویل کیجیے۔

(i) 5 (ii) 7 (iii) 19
(iv) 30 (v) 89 (vi) 100
(vii) 158 (viii) 666 (ix) 1023

3۔ مندرجہ ذیل اعداد کو مترادف اعشاری اعداد میں تحویل کیجیے۔

(i) $24_{(5)}$ (ii) $30_{(5)}$ (iii) $124_{(5)}$
(iv) $10_{(2)}$ (v) $101_{(2)}$ (vi) $100000_{(2)}$
(vii) $444_{(5)}$ (viii) $30000_{(5)}$ (ix) $432100_{(5)}$
(x) $10101010_{(2)}$ (xi) $1000000000_{(2)}$ (xii) $111111111111_{(2)}$

3.4 اساس پانچ کے نظام میں جمع، تفریق

(ADDITION AND SUBTRACTION IN BASE 5)

ہم پڑھ چکے ہیں کہ اساس پانچ کے نظام میں صرف پانچ ہندسے یعنی 0, 1, 2, 3, 4 استعمال ہوتے ہیں۔ اس نظام میں پانچ اور پانچ سے بڑے اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے جو عددی علامتیں استعمال ہوتی ہیں۔ اُن میں دو یا دو سے زیادہ ہندسے استعمال ہوتے ہیں۔ پس اساس پانچ کے نظام میں اگر دو اعداد کا مجموعہ پانچ یا پانچ سے زیادہ ہو تو یہ

'جمع یا حاصل' ہوگی ۔

مثال 1:

$2_{(5)}$ اور $4_{(5)}$ کو جمع کیجیے۔

حل :

چونکہ دو اور چار کا مجموعہ چھے ہوتا ہے اور اساس پانچ کے نظام میں عدد چھے کو علامت ' 11 ' سے ظاہر کرتے ہیں، لہٰذا

$$2_{(5)} + 4_{(5)} = 11_{(5)}$$

یا

$$\begin{array}{r} 2_{(5)} \\ +\ 4_{(5)} \\ \hline 11_{(5)} \end{array}$$

مثال 2:

$4_{(5)}$ اور $4_{(5)}$ کو جمع کیجیے۔

حل:

چونکہ چار اور چار کا مجموعہ آٹھ ہوتا ہے اور اساس پانچ کے نظام میں عدد آٹھ کو علامت ' 13 ' سے ظاہر کرتے ہیں۔
لہٰذا

$$4_{(5)} + 4_{(5)} = 13_{(5)}$$

یا

$$\begin{array}{r} 4_{(5)} \\ +\ 4_{(5)} \\ \hline 13_{(5)} \end{array}$$

اگلے صفحہ پر اساس پانچ کے نظام میں جدول دی گئی ہے۔ جس کے استعمال سے ہم باآسانی اس نظام میں اعداد کو جمع کر سکتے ہیں۔

اساس پانچ کے نظام میں جمع کی جدول

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

اساس پانچ کے نظام میں جمع کی مزید وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 3:

$124_{(5)}$ اور $302_{(5)}$ کو جمع کیجیے۔

حل:

$124_{(5)} + 302_{(5)} = 431_{(5)}$ یا

$$\begin{array}{r} \overset{①}{124}_{(5)} \\ +\ 302_{(5)} \\ \hline 431_{(5)} \end{array}$$

مثال 4:

$4141_{(5)} + 3321_{(5)}$ کو حل کیجیے۔

حل:

$3321_{(5)} + 4141_{(5)} = 13012_{(5)}$ یا

$$\begin{array}{r} ①① \\ 3321_{(5)} \\ +\ 4141_{(5)} \\ \hline 13012_{(5)} \end{array}$$

واضح رہے کہ مندرجہ بالا مثالوں میں ① حاصل بلحاظ پانچ ہے۔

اساس پانچ کے نظام میں تفریق کے عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:

$431_{(5)}$ سے $124_{(5)}$ کو تفریق کیجیے۔

حل:

$431_{(5)} - 124_{(5)} = 302_{(5)}$ یا

$$\begin{array}{r} \scriptsize{②⑪} \\ 431_{(5)} \\ -\ 124_{(5)} \\ \hline 302_{(5)} \end{array}$$

وضاحت: دائیں طرف سے پہلے کالم میں ہم عدد ایک سے عدد چار تفریق کرنا چاہتے ہیں جو کہ ممکن نہیں ہے، لہٰذا دوسرے کالم میں 3 میں سے 1 حاصل لیا تو وہاں باقی 2 رہ گیا جب کہ پہلے کالم میں '11' بن گیا۔ ہمیں معلوم ہے کہ اساس پانچ کے نظام میں علامت '11' عدد چھے کو ظاہر کرتی ہے۔ پس اَب ہم پہلے کالم میں عدد چھے سے عدد چار تفریق کریں گے تو حاصل تفریق عدد 'دو' ہوگا، جسے علامت "2" سے ظاہر کرتے ہیں۔ تفریق کا باقی عمل واضح ہے۔

مثال 2:

حل: $13012_{(5)} - 4141_{(5)}$ کو حل کیجیے۔

$$\begin{array}{r} ②④⑪\ \\ 1\not{3}012_{(5)} \\ -\ 4141_{(5)} \\ \hline 3321_{(5)} \end{array}$$

وضاحت: (i) پہلے کالم میں تفریق کا عمل واضح ہے۔

(ii) دوسرے کالم میں چونکہ عدد 'ایک' سے عدد 'چار' تفریق نہیں ہو سکتا، لہٰذا تیسرے کالم سے '1' حاصل لینا پڑے گا۔ تیسرے کالم میں چونکہ '0' ہے لہٰذا پہلے ہم نے چوتھے کالم سے تیسرے کالم کے لیے '1' حاصل لیا تو چوتھے کالم میں باقی '2' رہ گیا۔ جب کہ تیسرے کالم میں '10' بن گیا۔ اساس پانچ کے نظام میں

اِس خاصیت کو ہم اختصار کی خاطر ضرب ـ تفریق خاصیت کہیں گے۔

مثال : 1

$$4(6+2) = 4\times 6 + 4\times 2$$
$$= 24 + 8 = 32$$

مثال : 2

$$5\times 56 = 5(50+6)$$
$$= 250 + 30$$
$$= 280$$

مشق 2.3

1۔ مندرجہ ذیل میں ہر عدد کا جمعی معکوس اور ضربی معکوس بتایئے۔

(i) 1 (ii) 0 (iii) $\frac{11}{12}$ (iv) $-\frac{5}{6}$

(v) $-\frac{16}{15}$ (vi) $\frac{100}{103}$ (vii) $-2\frac{5}{11}$ (viii) 25

2۔ دیے گئے فقرے میں جو خاصیت استعمال ہوئی ہے اُس کا نام بتایئے

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ (ii) $(\frac{2}{5}+\frac{3}{7})+\frac{4}{9}=\frac{2}{5}+(\frac{3}{7}+\frac{4}{9})$

(iii) $(\frac{11}{12}+\frac{9}{10})\times\frac{4}{5}=\frac{11}{12}\times\frac{4}{5}+\frac{9}{10}\times\frac{4}{5}$

(iv) $\frac{50-45}{5}=\frac{50}{5}-\frac{45}{5}$ (v) $\frac{22}{5}-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}(11-4)$

(vi) $(\frac{1}{2}-\frac{5}{6})\times\frac{8}{9}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}-\frac{5}{6}\times\frac{8}{9}$

(vii) $(\frac{-4}{5})\times(\frac{-5}{4})=1$

(viii) $\frac{2}{7}+(\frac{-2}{7})=0$

3۔ دیے گئے جدول میں خالی خانے اِس طرح پُر کیجیے کہ اگر دیے ہوئے سیٹ میں مذکورہ خاصیت موجود ہو تو خانے میں '✓' کا نشان لگایئے ورنہ '×' (جیسا کہ سطر چار میں دِکھایا گیا ہے)

خاصیت	قدرتی اعداد کا سیٹ	مکمل اعداد کا سیٹ	صحیح اعداد کا سیٹ	ناطق اعداد کا سیٹ
بندش بلحاظ جمع				
مبادلہ بلحاظ جمع				
تلازم بلحاظ جمع				
جمعی ذاتی عنصر کا وجود	×	✓	✓	✓
جمعی معکوس کا وجود				
بندش بلحاظ ضرب				
مبادلہ بلحاظ ضرب				
تلازم بلحاظ ضرب				
ضربی ذاتی عنصر کا وجود				
ضربی معکوس کا وجود (سوائے صفر کے اگر موجود ہو)				
ضرب جمع خاصیت یا ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع				

4- مختصر کیجیے:

(i) $\frac{5}{2} \times \frac{-3}{5}$ (ii) $(-\frac{3}{4})\times(-\frac{2}{5})$ (iii) $\frac{8}{9} \div \frac{-2}{3}$

(iv) $\frac{-5}{12} \div \frac{10}{-3}$ (v) $\frac{7}{8} \times \frac{4}{7} \times (-\frac{3}{2})$ (vi) $-\frac{5}{9} \div (\frac{2}{3} \div \frac{1}{2})$

(vii) $(\frac{7}{9} \times \frac{-3}{4}) \div \frac{1}{2}$ (viii) $(-\frac{3}{5}) \div (-\frac{7}{10})$ (ix) $\frac{7}{8} - [\frac{3}{4} - (-\frac{1}{2})]$

(x) $\frac{2}{3} + (\frac{3}{4} - \frac{7}{8})$ (xi) $(2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}) \times (1\frac{1}{8} - 2\frac{1}{4})$

(xii) $(5\frac{1}{3} - 6\frac{2}{3}) \div (7\frac{1}{4} - 2\frac{2}{3})$

5- مندرجہ ذیل فقرات کو مکمل کیجیے۔

(i) ناطق اعداد کی تفریق کا عمل خاصیت مبادلہ ---

(ii) ناطق اعداد کا سیٹ بلحاظ تقسیم خاصیت تلازم ---

(iii) قدرتی اعداد کا سیٹ بلحاظ ضرب خاصیت بندش --- مگر بلحاظ تقسیم خاصیت بندش ---

(iv) ناطق اعداد کے سیٹ میں --- کی خاصیت موجود ہے جبکہ یہ خاصیت قدرتی اعداد کے سیٹ اور صحیح اعداد کے سیٹ میں سے کسی میں موجود نہیں۔

(v) ناطق اعداد میں جمعی ذاتی عنصر --- ہے جبکہ ضربی ذاتی عنصر ---

(vi) صفر کا ضربی معکوس اس واسطے موجود نہیں کہ اسے کسی بھی عدد سے ضرب دینے سے --- حاصل نہیں ہو سکتا۔

(vii) ناطق اعداد کا سیٹ مندرجہ ذیل سیٹوں کا فوقی سیٹ ہے۔

(a) --- (b) --- (c) ---

باب 3

عددی نظام

(NUMERATION SYSTEM)

3.1 اعشاری نظام (DECIMAL SYSTEM)

اعداد کے جس نظام سے ہم واقف ہیں۔ اسے " اعداد کا اعشاری نظام " کہتے ہیں۔ اِس نظام میں بنیادی علامتیں جنھیں ہندسے کہتے ہیں تعداد میں دس ہیں۔ یہ ہندسے مندرجہ ذیل ہیں۔

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

اعداد صِفر تا نَو کو اِن بنیادی علامتوں یا ہندسوں سے ظاہر کرتے ہیں۔ جو قدرتی اعداد نَو سے بڑے اور سَو سے چھوٹے ہوں انھیں ظاہر کرنے والی عددی علامتیں دو دو ہندسوں پر مشتمل ہوتی ہیں۔ اِسی طرح نِنانوے سے بڑے اور ہزار سے چھوٹے قدرتی اعداد کو ظاہر کرنے کے لئے تین تین ہندسوں والی علامتیں استعمال ہوتی ہیں وغیرہ وغیرہ۔

اب مندرجہ ذیل مساواتوں پر غور کیجیے۔

$$25 = 20 + 5$$
$$= 2 \times 10 + 5$$
$$= 2 \times 10^1 + 5$$

$$425 = 400 + 20 + 5$$
$$= 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5$$
$$= 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5$$

$$6425 = 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5$$
$$= 6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5$$

نوٹ : 6425 کو مطلوبہ شکل میں لکھنے کا طریقہ

10	6425
10	642 – 5
10	64 – 2
	6 – 4

پس

$$6425_{(10)} = 6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5$$

25 دراصل $2 \times 10^1 + 5$
کی مختصر شکل ہے۔
425 دراصل $4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5$
کی مختصر شکل ہے۔ جبکہ
6425 دراصل

$$6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5$$

کی مختصر شکل ہے۔
ہم دیکھتے ہیں کہ اوپر دی گئی مثالوں میں ہر عدد کو 10 کی طاقتوں کے استعمال کی مدد سے ظاہر کیا گیا ہے۔ لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ دس (بمعنی عشر) اعداد کے اعشاری نظام " کی اساس " (بنیاد) ہے۔ باور کیا جاتا ہے کہ اِس نظام کا رواج پانا محض اتفاقی ہے۔ کیونکہ انسان کے ہاتھ میں دس انگلیاں ہوتی ہیں اور پُرانے وقتوں کے لوگ گنتی کرنے کے لیے انگلیاں استعمال کرتے تھے۔ قدیم زمانے میں دنیا کے کئی ملکوں میں ایسے عددی نظام رائج رہے ہیں۔ جن کی اساسیں دس سے مختلف تھیں ہم جانتے ہیں کہ گھڑی کے ڈائل پر گھنٹوں کو ظاہر کرنے والے نشانات تعداد میں بارہ ہوتے ہیں لہٰذا گھنٹوں کو ظاہر کرنے والی سوئی اساس بارہ کے نظام کے تحت چلتی ہے۔ کمپیوٹر میں جو عددی نظام استعمال ہوتا ہے۔ اُس کی اساس " دو " ہوتی ہے۔
ہم یہاں آپ کا تعارف اساس "پانچ" اور اساس" دو " کے عددی نظاموں سے کرائیں گے۔

3.2 اساس پانچ کا نظام (NUMERATION SYSTEM WITH BASE 5)

اساس پانچ کے نظام میں اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے صرف پانچ ہندسوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ ہم انھیں 4 ,3 ,2 ,1 ,0 سے ظاہر کریں گے۔

واضح رہے کہ اِن ہندسوں کے لیے ہم کوئی اور علامت بھی وضع کرسکتے ہیں۔

مختلف اساسوں میں فرق واضح رکھنے کی خاطر ہم ہر عددی علامت کے ساتھ متعلقہ اساس لکھ دیں گے۔ مثلاً $423_{(10)}$ کا مطلب ہے کہ عدد 423 کو اساس دس کے نظام سے لکھا گیا ہے۔ اِسی طرح $303_{(5)}$ اور $101_{(2)}$ سے مراد یہ ہے کہ اعداد 303 اور 101 کو بالترتیب اساس "پانچ" اور اساس "دو" کے لحاظ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

ہم کسی بھی دیے ہوئے عدد کو ایک اساس سے دوسری اساس میں تحویل کرسکتے ہیں۔ یاد رہے کہ اعشاری نظام کے کسی عدد کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کرنے کے لیے اس کو '5' کی طاقتوں کے مجموعے کے طور پر لکھتے ہیں۔ (جیسا کہ اِس باب کے شروع میں اعشاری نظام کے اعداد کو '10' کی طاقتوں کے مجموعے کے طور پر لکھ کر دکھایا گیا ہے۔)

اِس مقصد کے لیے ہم اعشاری نظام میں دیے ہوئے عدد کو یکے بعد دیگرے '5' پر تقسیم کرتے جاتے ہیں حتیٰ کہ خارج قسمت 5 سے کم رہ جاتا ہے۔ اِس امر کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:

$9_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

5	9
	1 – 4 →

پس

$$9_{(10)} = 1 \times 5 + 4 = 14_{(5)}$$

مثال 2:

$17_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

5	17
	3 — 2

پس $17_{(10)} = 3 \times 5 + 2 = 32_{(5)}$

نوٹ: واضح رہے کہ ہم $14_{(5)}$ کو "ایک چار اساس پانچ" پڑھیں گے۔

مثال 3:

$58_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

5	58
5	11 — 3
	2 — 1

پس $58_{(10)} = 2 \times 5^2 + 1 \times 5 + 3 = 213_{(5)}$

مثال 4:

$460_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

5	460
5	92 — 0
5	18 — 2
	3 — 3

پس $460_{(10)} = 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 0 = 3320_{(5)}$

نوٹ: چونکہ اساس پانچ کے نظام میں ہندسہ 5 نہیں ہوتا لہٰذا ہمیں $3320_{(5)}$ کی بجائے $3320_{\text{پانچ}}$ لکھنا چاہیئے۔ ہم صرف سہولت کی خاطر $3320_{(5)}$ لکھ رہے ہیں۔ اسی طرح $101_{(2)}$ کو $101_{\text{دو}}$ لکھا جائے گا۔

مثال 5:

$9107_{(10)}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

5	9107
5	1821 — 2
5	364 — 1
5	72 — 4
5	14 — 2
	2* — 4

پس

$$9107_{(10)} = 242412_{(5)}$$

نوٹ: اساس پانچ کا مطلوبہ عدد لکھنے کے لیے آخری مقام پر آخری خارج قسمت یعنی نشان زدہ *2 لکھیں۔ اس کے بعد تیروں کے مطابق بالترتیب باقیات لکھتے جائیں۔

مندرجہ ذیل حل شدہ مثالوں میں اساس پانچ کے اعداد کو اساس دس کے مترادف اعداد میں تحویل کرنے کے طریقہ کی وضاحت کی جا رہی ہے۔ آسانی کی خاطر ہم اساس دس کے اعداد کے ساتھ اساس نہیں لکھیں گے۔

مثلاً $519_{(10)}$ ، $47_{(10)}$ ، $8_{(10)}$ کو محض 8, 47, 519 لکھیں گے۔

مثال 6:

$14_{(5)}$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$14_{(5)} = 1 \times 5 + 4 = 5 + 4 = 9$$

مثال 7:

$43_{(5)}$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$43_{(5)} = 4 \times 5 + 3 = 20 + 3 = 23$$

مثال 8 :

$301_{(5)}$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل :

$$301_{(5)} = 3 \times 5^2 + 0 \times 5 + 1$$
$$= 75 + 0 + 1 = 76$$

مثال 9 :

$4213_{(5)}$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل :

$$4213_{(5)} = 4 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 1 \times 5 + 3$$
$$= 4 \times 125 + 2 \times 25 + 5 + 3$$
$$= 500 + 50 + 8$$
$$= 558$$

3.3 ثنائی نظام (BINARY SYSTEM)

ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ کمپیوٹر میں اساس دو کا نظام استعمال ہوتا ہے۔ کیونکہ کمپیوٹر بجلی سے چلتا ہے اور برقی رو یا تو اوف (Off) ہوتی ہے یا اون (on)۔پس کمپیوٹر میں '0' کو اوف اور '1' کو اون کے مطابق لیا جاتا ہے۔

اساس دو کے نظام کا دوسرا نام ثنائی نظام ہے۔

واضح رہے کہ ہم ثنائی نظام میں علامات یا ہندسوں کو 0,1 سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

عدد	علامت	عدد	علامت
صفر	0	چھے	110
ایک	1	سات	111
دو	10	آٹھ	1000
تین	11	نو	1001
چار	100	دس	1010
پانچ	101		

اگلے صفحہ پر اعشاری نظام کے اعداد کو ثنائی نظام کے مترادف اعداد اور ثنائی نظام

کے اعداد کو اعشاری نظام کے مترادف اعداد میں تحویل کرنے کی وضاحت حل شدہ مثالوں سے کی جاتی ہے۔ یاد رہے کہ اعشاری عدد کو ثنائی عدد میں تحویل کرنے کے لیے اعشاری عدد کو بار بار '2' پر تقسیم کرتے جاتے ہیں حتیٰ کہ خارج قسمت 2 سے کم رہ جاتا ہے۔

نوٹ : اعشاری عدد سے مُراد اعشاری نظام کا عدد اور ثنائی عدد سے مُراد ثنائی نظام کا عدد ہے۔

مثال 1 :

$9_{(10)}$ کو ثنائی نظام کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل :

2	9	
2	4 — 1	↑
2	2 — 0	↑
	1 — 0 →	

پس

$$9_{(10)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$
$$= 1001_{(2)}$$

مثال 2 :

$17_{(10)}$ کو اساس دو کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل :

2	17	
2	8 — 1	↑
2	4 — 0	↑
2	2 — 0	↑
	1 — 0 →	

پس

$$17_{(10)} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$
$$= 10001_{(2)}$$

مثال 3:

$460_{(10)}$ کو مترادف ثنائی عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

2	460
2	230 - 0
2	115 - 0
2	57 - 1
2	28 - 1
2	14 - 0
2	7 - 0
2	3 - 1
	1 - 1

پس

$$460_{(10)} = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$$

$$= 111001100_{(2)}$$

مثال 4:

$743_{(10)}$ کو ثنائی نظام کے مترادف عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

2	743
2	371 - 1
2	185 - 1
2	92 - 1
2	46 - 0
2	23 - 0
2	11 - 1

2	5 - 1
2	2 - 1
	1 - 0

پس $743_{(10)} = 1011100111_{(2)}$

مثال 5:

$1001_{(2)}$ کو مترادف اعشاری عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$1001_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$
$$= 8 + 0 + 0 + 1 = 9$$

مثال 6:

$11110001_{(2)}$ کو مترادف اعشاری عدد میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$11110001_{(2)} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4$$
$$+ 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$
$$= 128 + 64 + 32 + 16 + 0 + 0 + 0 + 1 = 241$$

اب ہم دس تک اعداد کو اساس پانچ اور اساس دو کے نظاموں میں علامات سے ظاہر کرکے دِکھائیں گے۔

عدد	اساس پانچ کے نظام میں علامت	اساس دو کے نظام میں علامت
صفر	0	0
ایک	1	1
دو	2	10
تین	3	11
چار	4	100
پانچ	10	101
چھے	11	110
سات	12	111
آٹھ	13	1000

نو	14	1001
دس	20	1010

مشق 3.1

1۔ مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو اساس پانچ کے مترادف اعداد میں تحویل کیجیے۔

(i) 8 (ii) 15 (iii) 67
(iv) 109 (v) 287 (vi) 888
(vii) 1234 (viii) 5000 (ix) 9083

2۔ مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو ثنائی نظام کے مترادف اعداد میں تحویل کیجیے۔

(i) 5 (ii) 7 (iii) 19
(iv) 30 (v) 89 (vi) 100
(vii) 158 (viii) 666 (ix) 1023

3۔ مندرجہ ذیل اعداد کو مترادف اعشاری اعداد میں تحویل کیجیے۔

(i) $24_{(5)}$ (ii) $30_{(5)}$ (iii) $124_{(5)}$
(iv) $10_{(2)}$ (v) $101_{(2)}$ (vi) $100000_{(2)}$
(vii) $444_{(5)}$ (viii) $30000_{(5)}$ (ix) $432100_{(5)}$
(x) $10101010_{(2)}$ (xi) $1000000000_{(2)}$ (xii) $111111111111_{(2)}$

3.4 اساس پانچ کے نظام میں جمع، تفریق
(ADDITION AND SUBTRACTION IN BASE 5)

ہم پڑھ چکے ہیں کہ اساس پانچ کے نظام میں صرف پانچ ہندسے یعنی 0, 1, 2, 3, 4 استعمال ہوتے ہیں۔ اِس نظام میں پانچ اور پانچ سے بڑے اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے جو عددی علامتیں استعمال ہوتی ہیں۔ اُن میں دو یا دو سے زیادہ ہندسے استعمال ہوتے ہیں۔ پس اساس پانچ کے نظام میں اگر دو اعداد کا مجموعہ پانچ یا پانچ سے زیادہ ہو تو یہ

'جمع یا حاصل' ہوگی۔

مثال 1:

$2_{(5)}$ اور $4_{(5)}$ کو جمع کیجیے۔

حل:

چونکہ دو اور چار کا مجموعہ چھے ہوتا ہے اور اساس پانچ کے نظام میں عدد چھے کو علامت '11' سے ظاہر کرتے ہیں، لہٰذا

$$2_{(5)} + 4_{(5)} = 11_{(5)}$$

یا

$$\begin{array}{r} 2_{(5)} \\ +\ 4_{(5)} \\ \hline 11_{(5)} \end{array}$$

مثال 2:

$4_{(5)}$ اور $4_{(5)}$ کو جمع کیجیے۔

حل:

چونکہ چار اور چار کا مجموعہ آٹھ ہوتا ہے اور اساس پانچ کے نظام میں عدد آٹھ کو علامت '13' سے ظاہر کرتے ہیں۔

لہٰذا

$$4_{(5)} + 4_{(5)} = 13_{(5)}$$

یا

$$\begin{array}{r} 4_{(5)} \\ +\ 4_{(5)} \\ \hline 13_{(5)} \end{array}$$

اگلے صفحہ پر اساس پانچ کے نظام میں جدول دی گئی ہے۔ جس کے استعمال سے ہم باآسانی اس نظام میں اعداد کو جمع کر سکتے ہیں۔

اساس پانچ کے نظام میں جمع کی جدول

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

اساس پانچ کے نظام میں جمع کی مزید وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 3:

$124_{(5)}$ اور $302_{(5)}$ کو جمع کیجیے۔

حل:

$124_{(5)} + 302_{(5)} = 431_{(5)}$ ، یا

$$\begin{array}{r} \overset{①}{1}24_{(5)} \\ +\ 302_{(5)} \\ \hline 431_{(5)} \end{array}$$

مثال 4:

$4141_{(5)} + 3321_{(5)}$ کو حل کیجیے۔

حل:

$3321_{(5)} + 4141_{(5)} = 13012_{(5)}$ یا

$$\begin{array}{r} \overset{①①}{3321}_{(5)} \\ +\ 4141_{(5)} \\ \hline 13012_{(5)} \end{array}$$

واضح رہے کہ مندرجہ بالا مثالوں میں ① حاصل بلحاظ پانچ ہے۔

اساس پانچ کے نظام میں تفریق کے عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:

$431_{(5)}$ سے $124_{(5)}$ کو تفریق کیجیے۔

حل:

$431_{(5)} - 124_{(5)} = 302_{(5)}$ یا

$$\begin{array}{r} \overset{②⑪}{431}_{(5)} \\ -\ 124_{(5)} \\ \hline 302_{(5)} \end{array}$$

وضاحت: دائیں طرف سے پہلے کالم میں ہم عدد ایک سے عدد چار تفریق کرنا چاہتے ہیں جو کہ ممکن نہیں ہے، لہٰذا دوسرے کالم میں 3 میں سے 1 حاصل لیا تو وہاں باقی 2 رہ گیا جب کہ پہلے کالم میں '11' بن گیا۔ ہمیں معلوم ہے کہ اساس پانچ کے نظام میں علامت '11' عدد چھے کو ظاہر کرتی ہے۔ پس اَب ہم پہلے کالم میں عدد چھے سے عدد چار تفریق کریں گے تو حاصل تفریق عدد 'دو' ہوگا، جسے علامت "2" سے ظاہر کرتے ہیں۔ تفریق کا باقی عمل واضح ہے۔

مثال 2:

$13012_{(5)} - 4141_{(5)}$ کو حل کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} ②④⑪\ \ \\ 1\not{3}012_{(5)} \\ -\ 4141_{(5)} \\ \hline 3321_{(5)} \end{array}$$

وضاحت: (i) پہلے کالم میں تفریق کا عمل واضح ہے۔

(ii) دوسرے کالم میں چونکہ عدد 'ایک' سے عدد 'چار' تفریق نہیں ہوسکتا، لہٰذا تیسرے کالم سے '1' حاصل لینا پڑے گا۔ تیسرے کالم میں چونکہ '0' ہے لہٰذا پہلے ہم نے چوتھے کالم سے تیسرے کالم کے لیے '1' حاصل لیا تو چوتھے کالم میں باقی '2' رہ گیا۔ جب کہ تیسرے کالم میں '10' بن گیا۔ اساس پانچ کے نظام میں

10 عدد پانچ کو ظاہر کرتا ہے۔ اس لیے جب تیسرے کالم میں عدد پانچ سے، دوسرے کالم کے لیے '1' حاصل لیا تو تیسرے کالم میں باقی '4' رہ گیا۔ جبکہ دوسرے کالم میں "11" بن گیا۔ اب $11_{(5)}$ ظاہر کرتا ہے عدد چھے کو۔ پس دوسرے کالم میں عدد چھے سے عدد چار تفریق کیا تو دونوں کا فرق '2' آیا جو کہ لائن کے نیچے دوسرے کالم میں درج کر دیا۔

(iii) تفریق کا باقی عمل بھی اسی طرح کیا گیا ہے۔

3.5 ثنائی نظام میں جمع و تفریق (ADDITION AND SUBTRACTION IN BINARY SYSTEM)

ثنائی نظام میں جمع اور تفریق کے عوامل، بالکل اساس پانچ کے نظام میں جمع اور تفریق کے عوامل کی طرح ہیں۔ فرق صرف یہ ہے کہ ثنائی نظام میں اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے صرف دو ہندسے 0, 1 استعمال ہوتے ہیں۔

ثنائی نظام میں جمع کی جدول مندرجہ ذیل ہے۔

+	0	1
0	0	1
1	1	10

ثنائی نظام میں جمع اور تفریق کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1:

$10_{(2)}$ اور $11_{(2)}$ کو جمع کیجیے۔

حل:

$$10_{(2)} + 11_{(2)} = 101_{(2)}$$

یا

$$\begin{array}{r} 10_{(2)} \\ +\ 11_{(2)} \\ \hline 101_{(2)} \end{array}$$

مثال 2:

حل: $110001_{(2)}$ اور $10111101_{(2)}$ کو جمع کیجیے۔

$110001_{(2)} + 10111101_{(2)}$
$= 11101110_{(2)}$

یا

$$\begin{array}{r} 110001_{(2)} \\ +\ 10111101_{(2)} \\ \hline 11101110_{(2)} \end{array}$$

مثال 3:

حل: $1010_{(2)}$ میں سے $1000_{(2)}$ کو تفریق کیجیے۔

$1010_{(2)} - 1000_{(2)}$
$= 10_{(2)}$

یا

$$\begin{array}{r} 1010_{(2)} \\ -\ 1000_{(2)} \\ \hline 10_{(2)} \end{array}$$

مثال 4:

حل: $100011111_{(2)}$ اور $1111110011_{(2)}$ کا فرق معلوم کیجیے۔

چونکہ $1111110011_{(2)}$ بڑا ہے $100011111_{(2)}$ سے پس فرق مندرجہ ذیل ہوگا۔

$$\begin{array}{r} 1111110011_{(2)} \\ -\ 100011111_{(2)} \\ \hline 1011010100_{(2)} \end{array}$$

اس لیے $100011111_{(2)}$ اور $1111110011_{(2)}$ کا فرق برابر ہے $1011010100_{(2)}$

مشق 3.2

حاصل جمع معلوم کیجیے۔

1- $3_{(5)} + 4_{(5)}$ 2- $1_{(5)} + 2_{(5)}$

3- $12_{(5)} + 23_{(5)}$ 4- $24_{(5)} + 40_{(5)}$

5- $214_{(5)} + 103_{(5)}$ 6- $444_{(5)} + 444_{(5)}$

7- $333_{(5)} + 222_{(5)}$ 8- $4123_{(5)} + 102_{(5)}$

9- $1234_{(5)} + 4210_{(5)}$ 10- $4003_{(5)} + 3333_{(5)}$

حاصل تفریق معلوم کیجیے۔

11- $4_{(5)} - 1_{(5)}$ 12- $23_{(5)} - 12_{(5)}$

13- $43_{(5)} - 34_{(5)}$ 14- $124_{(5)} - 42_{(5)}$

15- $241_{(5)} - 104_{(5)}$ 16- $443_{(5)} - 334_{(5)}$

17- $444_{(5)} - 401_{(5)}$ 18- $1403_{(5)} - 1201_{(5)}$

19- $2222_{(5)} - 1203_{(5)}$ 20- $4000_{(5)} - 3333_{(5)}$

مندرجہ ذیل کو حل کیجیے۔

21- $100_{(2)} + 11_{(2)}$ 22- $101_{(2)} + 111_{(2)}$

23- $10111_{(2)} + 1110_{(2)}$ 24- $1000111_{(2)} + 11101111_{(2)}$

25- $100_{(2)} - 11_{(2)}$ 26- $1011_{(2)} - 1001_{(2)}$

27- $10011_{(2)} - 10000_{(2)}$ 28- $11110101_{(2)} - 1111111_{(2)}$

29- $1100000_{(2)} - 1000000_{(2)}$ 30- $111111_{(2)} - 100000_{(2)}$

مندرجہ ذیل کو حل کیجیے۔

31- $44_{(5)} - 23_{(5)} + 14_{(5)}$ 32- $22_{(5)} - \{ 13_{(5)} - 34_{(5)} \}$

33- $210_{(5)} + [103_{(5)} - \{ 24_{(5)} - 133_{(5)} \}]$

34- [$424_{(5)} + \{ 244_{(5)} + 122_{(5)} \}] - 123_{(5)}$

اساس دس کے نظام میں تحویل کر کے حل کیجیے۔

35 - $12_{(5)} + 10_{(2)} - 11_{(5)}$

36 - $44_{(5)} - \{ 101_{(2)} + 23_{(5)} \}$

37 - $311_{(5)} + \{ 10001_{(2)} + 1122_{(5)} \}$

38 - $19_{(10)} + 41_{(5)} + 1011_{(2)}$

39 - $487_{(10)} - 2140_{(5)} + 100011_{(2)}$

40 - $9873_{(10)} - 101111_{(2)} - 24110_{(5)}$

3.6 اساس پانچ اور دو کے نظاموں میں ضرب (MULTIPLICATION IN THE BASE 5 AND 2)

پچھلی جماعتوں میں ہم پڑھ چکے ہیں کہ ضرب درحقیقت کسی عدد کو بار بار جمع کرنے کا دوسرا نام ہے۔ چنانچہ اساس پانچ اور دو کے نظاموں میں بھی ضرب کا عمل، جمع کے عمل ہی سے اخذ کیا جاتا ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ اعشاری نظام میں ضرب کے عمل میں سہولت کی خاطر ضرب کی جدولیں (پہاڑے) یاد کرنا ضروری ہوتے ہیں۔ دیگر نظاموں میں بھی ضرب کے عمل میں آسانی کی خاطر پہاڑے یاد کرنا ضروری ہیں۔ مندرجہ ذیل میں اساس پانچ اور دو کے نظاموں کے لیے ضرب کی جدولیں دی گئی ہیں۔

اساس پانچ کے نظام میں ضرب کی جدول

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

ثنائی نظام میں ضرب کی جدول

×	0	1
0	0	0
1	0	1

ضرب کے عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1 :

$3_{(5)}$ اور $2_{(5)}$ کو ضرب دیجیے۔

حل :

اعداد تین اور دو کا حاصل ضرب چھے ہوتا ہے۔
چھے میں 1 اکائی اور 1 پانچ ہوتا ہے لہٰذا

$$3_{(5)} \times 2_{(5)} = 11_{(5)}$$

مثال 2 :

$14_{(5)}$ اور $3_{(5)}$ کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل :

$14_{(5)} \times 3_{(5)} = 102_{(5)}$ یا

$$\begin{array}{r} 14_{(5)} \\ \times\ 3_{(5)} \\ \hline 102_{(5)} \end{array}$$

وضاحت : اعداد چار اور تین کا حاصل ضرب بارہ ہوتا ہے۔ بارہ میں 2 اکائیاں اور 2 پانچ ہوتے ہیں، پس اساس پانچ کے نظام میں عدد بارہ کو 22 سے ظاہر کرتے ہیں۔ ضرب کا باقی عمل بھی اسی طرح کیا گیا ہے۔

مثال 3 :

$231_{(5)}$ اور $34_{(5)}$ کو ضرب دیجیے۔

حل:

$$231_{(5)} \times 34_{(5)} = 20004_{(5)}$$

$$\begin{array}{r} 231_{(5)} \\ \times\ 34_{(5)} \\ \hline 2024 \\ 1243 \\ \hline 20004_{(5)} \end{array}$$

مثال 3 میں ضرب کا عمل اساس پانچ کے نظام میں ضرب کی جدول کی مدد سے کیا گیا ہے۔
مثال 1 اور 2 بھی اسی طرح کی جا سکتی ہیں۔

مثال 4:

$1001_{(2)}$ اور $1011_{(2)}$ کا حاصلِ ضرب معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1001_{(2)} \\ \times\ 1011_{(2)} \\ \hline 1001 \\ 1001 \\ 0000 \\ 1001 \\ \hline 1100011_{(2)} \end{array}$$

مشق 3.3

حل کیجیے۔

1- $4_{(5)} \times 2_{(5)}$

2- $4_{(5)} \times 13_{(5)}$

3- $24_{(5)} \times 42_{(5)}$

4- $43_{(5)} \times 33_{(5)}$

5- $120_{(5)} \times 14_{(5)}$

6- $44_{(5)} \times 123_{(5)}$

7- $243_{(5)} \times 403_{(5)}$

8- $343_{(5)} \times 233_{(5)}$

9- $10_{(2)} \times 11_{(2)}$

10- $101_{(2)} \times 110_{(2)}$

11- $111_{(2)} \times 1001_{(2)}$

12- $1101_{(2)} \times 1001_{(2)}$

13- $11011_{(2)} \times 11110_{(2)}$

14- $1101_{(2)} \times 11101_{(2)}$

15- $34_{(5)} \times 11_{(2)} \times 14_{(5)}$

16- $101_{(2)} \times 124_{(5)} \times 111_{(2)}$

17- $110_{(2)} \times 89_{(10)} \times 32_{(5)}$

18- $1110_{(2)} \times 122_{(5)} \times 78_{(10)}$

باب 4

نِسبت اور تناسب

(RATIO AND PROPORTION)

4.1 نِسبت (RATIO)

شاہد کی عمر 12 سال ہے اور اُس کے بڑے بھائی راشد کی عمر 15 سال ہے ان کی عمروں کا مقابلہ کرنے کا ایک طریقہ تو یہ ہے کہ اِن کے فرق کو مدِنظر رکھتے ہوئے ہم کہیں کہ شاہد راشد سے 3 سال چھوٹا ہے۔ اِس طرح کے مقابلہ کو مقابلہ بذریعہ تفریق کہتے ہیں۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم کہیں کہ شاہد کی عمر راشد کی عمر کا $\frac{12}{15}$ ہے یہ مقابلہ بذریعہ تقسیم یا کسر ہوگا۔ ایسے مقابلے کو نِسبت کہتے ہیں۔ ایسی صُورت میں ہم کہتے ہیں کہ شاہد اور راشد کی عمروں میں 12 اور 15 کی نِسبت ہے۔

12 اور 15 کی نسبت کو علامتی طور پر 15 : 12 (بائیں سے دائیں پڑھیے) لِکھتے ہیں اور '12 نسبت 15' پڑھتے ہیں۔

علامت ' : ' نسبت کی علامت ہے۔ یہ علامت دراصل تقسیم کی علامت (÷) کی ہی قدرے تبدیل شدہ شکل ہے۔

نسبت کو ظاہر کرنے کے لیے جو دو اعداد استعمال ہوتے ہیں انھیں نسبت کے ارکان کہتے ہیں۔ چنانچہ

15 : 12 میں 12 اور 15 نسبت کے ارکان ہیں۔

پس 15 : 12 کو 12 : 15 نہیں لِکھ سکتے کیونکہ یہ دو مختلف نسبتیں ہیں۔

4.2 نِسبت کی مختصر ترین یا معیاری صورت : (SIMPLIFIED FORM OF RATIO)

جب کسی نسبت کے ارکان صحیح اعداد ہوں اور باہم مفرد بھی ہوں یعنی ان کا عادِ اعظم '1' ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نِسبت مختصر ترین یا معیاری شکل میں ہے چونکہ نسبت کو کسر کی شکل میں بھی لِکھا جا سکتا ہے اس لیے اِسے معیاری شکل میں تحویل کرنے کے لیے کسروں کا سُنہری اصول استعمال کیا جا سکتا ہے یعنی اِس کے دونوں ارکان کو ایک ہی غیر صفر عدد سے

ضرب دے سکتے ہیں یا ایک ہی غیر صفر عدد پر تقسیم کر سکتے ہیں اِس کی دو صُورتیں ہوں گی۔

(1) اگر دی ہوئی نسبت کے ارکان صحیح اعداد ہوں مگر باہم مفرد نہ ہوں تو انہیں ان کے عاداعظم پر تقسیم کرنے سے نسبت معیاری صورت میں تحویل ہو جائے گی۔

(2) اگر نسبت کے ارکان کسریں ہوں تو انہیں ان کے مخرج کے ذواضعاف اقل سے ضرب دینے سے نسبت کی معیاری صورت حاصل ہو جائے گی۔ مثلاً

(i) $16 : 20 = 4 : 5$ (ارکان کو اِن کے عادِ اعظم 4 پر تقسیم کیا)

(ii) $50 : 75 = 2 : 3$ (ارکان کو ان کے عادِ اعظم 25 پر تقسیم کیا)

(iii) $\frac{2}{7} : \frac{5}{4} = 8 : 35$ (مخرجوں کے ذواضعافِ اقل 28 سے ضرب دی)

(iv) $\frac{5}{12} : \frac{7}{16} = 20 : 21$ (مخرجوں کے ذواضعاف اقل 48 سے ضرب دی)

پہلی صورت میں ارکان کا عادِ اعظم معلوم کرنے کی بجائے انہیں مشترک عادوں پر تقسیم بھی کر سکتے ہیں حتیٰ کہ دونوں ارکان باہم مفرد ہو جائیں۔

مثلاً

$$40 : 56 = \frac{40}{56}$$

$$= \frac{10}{14}$$ (شمار کنندہ اور مخرج کو 4 پر تقسیم کیا)

$$= \frac{5}{7}$$ (شمار کنندہ اور مخرج کو 2 پر تقسیم کیا)

$$= 5 : 7$$

پس $40 : 56 = 5 : 7$

مثال 1:

افتخار کا قد 1 میٹر 2 ڈیسی میٹر اور اس کے والد کا قد 1 میٹر 8 ڈیسی میٹر ہے۔ اِن کے قدوں میں نِسبت معلوم کیجیے۔

حل:

افتخار کا قد = 1 میٹر 2 ڈیسی میٹر

= 12 ڈیسی میٹر

افتخار کے والد کا قد = 1 میٹر 8 ڈیسی میٹر

= 18 ڈیسی میٹر

قدوں میں نسبت

=12 : 18

= 2 : 3

پس مطلوبہ نسبت

= 2 : 3

نوٹ : نسبت معلوم کرنے سے پیشتر دی ہوئی مقداروں کو ایک ہی اکائی میں تحویل کرنا لازمی ہوتا ہے۔

مثال 2 :

عارف کو اسلامیات اور ریاضی کے پرچوں میں بالترتیب 8 اور 10 سوالات حل کرنا تھے۔ اس نے اسلامیات میں 5 اور ریاضی میں 7 سوالات حل کیے۔ بتایے عارف کی کارکردگی کس مضمون میں بہتر رہی۔

حل :

کسی مضمون میں کارکردگی دُرست سوالات اور کُل سوالات کی نسبت سے حاصل ہوگی،
عارف کی اسلامیات میں کارکردگی

= 5 : 8

$= \frac{5}{8}$

عارف کی ریاضی میں کارکردگی

= 7 : 10

$= \frac{7}{10}$

اب ہم نے دیکھنا ہے کہ دونوں نسبتوں میں سے بڑی نسبت کونسی ہے جبکہ ہم جانتے ہیں کہ دو کسروں کا مقابلہ اُنھیں ہم مخرج کر کے کر سکتے ہیں۔ اب

8 اور 10 کا ذواضعاف اقل = 40

اِس لیے

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{40}{40} = \frac{25}{40}$$

اور $\frac{7}{10} = \frac{7}{10} \times \frac{40}{40} = \frac{28}{40}$

چونکہ $\frac{28}{40} > \frac{25}{40}$

پس معلوم ہوا کہ دوسری نسبت بڑی ہے پہلی سے۔
لٰہذا عارف کی کارکردگی ریاضی میں بہتر رہی۔

4.3 تناسب (PROPORTION)

ہم جانتے ہیں کہ دو نسبتوں کی برابری کو ظاہر کرنے والا فقرہ تناسب کہلاتا ہے۔
مثلاً فرض کیجیے کہ
ایک کنبے میں 5 افراد ہیں اور اِس کنبے کا ماہوار خرچ 2000 روپے ہے
جبکہ ایک دوسرے کنبے میں 8 افراد ہیں اور اس کنبے کا ماہوار خرچ 3200 روپے ہے۔ تب

$$2000 : 3200 = \frac{2000}{3200}$$

$$= \frac{20}{32}$$

$$= \frac{5}{8}$$

$$= 5 : 8$$

پس معلوم ہوا کہ $2000 : 3200 = 5 : 8$
لٰہذا کنبوں کے ماہوار خرچوں میں وہی نسبت ہے جو اُن کے افراد کی تعداد میں ہے۔ دو نسبتوں کی برابری کو تناسب کہتے ہیں اور ان کے چار ارکان کو ارکان متناسبہ یا متناسب مقداریں کہا جاتا ہے۔ عام طور پر اگر

$$a : b = c : d$$

تو یہ مساوات ایک تناسب ہوگی اور مقداریں $a, b, c, d,$ متناسب مقداریں ہوں گی۔
تناسب کو عام طور پر یوں لکھا جاتا ہے۔ $a : b :: c : d$ اور

اِس کو یوں پڑھیں گے " a نسبت b برابر ہے c نسبت d "
اِس کو پڑھنے کا بہتر طریقہ یہ ہے۔
" a کو b سے وہی نسبت ہے جو c کو d سے ہے۔"
نسبتوں کی برابری کی علامت '::' یہ اشارہ کرتی ہے کہ ہمارا سروکار دو نسبتوں کی برابری سے ہے۔

ضروری نوٹ : اگر

$$a : b = c : d$$

تو

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(طرفین کو $\frac{b}{c}$ سے ضرب دی)

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c}$$

یا

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

یا

$$a : c = b : d$$

لہٰذا معلوم ہوا کہ

اگر	$a : b = c : d$
تو	$a : c = b : d$

پس تناسب $a : b = c : d$ کو $a : c = b : d$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

یعنی

کسی تناسب میں وسطین کو آپس میں بدلا جاسکتا ہے

تناسب کے طرفین اور وسطین

طرفین

$$a \; : \; b \; :: \; c \; : \; d$$

وسطین

کسی تناسب کے پہلے اور آخری رُکن کو 'طرفین' اور دوسرے اور تیسرے رُکن کو 'وسطین' کہتے ہیں۔ چنانچہ تناسب

$$a : b : : c : d$$

میں a اور d طرفین ہیں اور b اور c وسطین ہیں۔

4.4 تناسب کی ایک اہم خاصیت (IMPORTANT PROPERTY OF PROPORTION)

ہمیں معلوم ہے کہ

$$a : b : : c : d$$

یعنی

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

اگر اور صرف اگر

$$ad = bc$$

لیکن ad تناسب کے طرفین کا حاصل ضرب ہے اور bc اس کے وسطین کا حاصل ضرب ہے۔ لہٰذا معلوم ہوا کہ کسی تناسب میں

★ طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

تناسب کے اکثر سوالات اِسی خاصیت کی مدد سے حل کیے جاتے ہیں۔

مثلاً اگر

$$x : 15 : : 40 : 60$$

تو (خاصیت تناسب)

$$60\,x = 15 \times 40$$

اس لیے

$$x = \frac{600}{60}$$

$$x = 10$$

مثال 1:

ایک پارک میں بجلی کا بہت اُونچا کھمبا نصب کیا گیا تھا ایک طالب عِلم نے

★ حوالہ کے لیے اس خاصیت کو خاصیت تناسب کہا جائے گا۔

مندرجہ ذیل طریقے سے کھمبے کی لمبائی معلوم کی۔

3 میٹر لمبائی کی چھڑی لے کر اُسے سیدھا زمین میں گاڑنے کے بعد اُس کے سایہ کو ماپا۔ ماپنے پر معلوم ہوا کہ چھڑی کا سایہ 1.5 میٹر ہے۔ جبکہ کھمبے کا سایہ 12 میٹر تھا۔

فرض کیا کھمبے کی بلندی x میٹر ہے۔

چھڑی کی بلندی = 3 میٹر

کھمبے کا سایہ = 12 میٹر

چھڑی کا سایہ = 1.5 میٹر

چونکہ کھمبے اور چھڑی کی بلندیوں میں وہی نسبت ہے جو ان کے سایوں میں ہے۔ پس

$x : 12 :: 3 : 1.5$

یا (خاصیتِ تناسب) $1.5\,x = 12 \times 3$

یا $x = \dfrac{12 \times 3}{1.5}$

یا $x = \dfrac{360}{15}$

$\therefore\ x = 24$

لہٰذا کھمبے کی بلندی 24 میٹر ہے۔

4.5 تناسب راست (DIRECT PROPORTION)

ساتویں جماعت میں ہم پڑھ چکے ہیں کہ عموماً دو مقداروں میں سے اگر ایک مقدار بڑھے یا کم ہو تو دوسری مقدار بھی اُسی نسبت سے بڑھتی یا کم ہوتی ہے۔ مقداروں کے درمیان اِس قسم کے تناسب کو تناسب راست کہتے ہیں۔

اُوپر دی گئی مثال میں کھمبے اور چھڑی کی اُونچائیوں میں وُہی نسبت ہے جو اُن کے سایوں کی لمبائیوں میں ہے اِس صورتحال کو ہم یُوں ظاہر کر سکتے ہیں۔

چھڑی	کھمبا
اونچائی ← 3	24
سایہ کی لمبائی ← 1.5	12

اِس سے مندرجہ ذیل تناسب حاصل ہوتا ہے۔

$$3 : 1.5 :: 24 : 12$$

اِس قسم کے تناسب کو تناسب راست کہتے ہیں۔ اِس مثال کے پیشِ نظر ہم کہہ سکتے ہیں کہ چار مقداروں a, b, c, d میں تناسب راست ہوگا اگر

$$a : b :: c : d$$

یا

$$a : b = c : d$$

4.6 تناسب معکوس (INVERSE PROPORTION)

اگر دو دی ہوئی مقداریں اِس طرح ہوں کہ ایک مقدار جس نسبت سے بڑھے تو دوسری مقدار اُسی نسبت سے کم ہو یا ایک مقدار جس نسبت سے کم ہو تو دوسری مقدار اُسی نسبت سے بڑھے تو اِن نسبتوں کے درمیان قائم ہونے والے تناسب کو تناسب معکوس کہتے ہیں وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثال دیکھیے۔

مثال 1:

6 کاریگر ایک کام کو 4 دِنوں میں ختم کرتے ہیں۔ اِس کام کو 3 کاریگر کتنے دِنوں میں ختم کریں گے۔

حل:

ظاہر ہے تین کاریگر دوگنا وقت لیں گے یعنی وہ کام کو 8 دِنوں میں ختم کریں گے ۔ کاریگروں کی تعداد جس حساب سے کم ہوگی دِنوں کی تعداد اُسی حساب سے بڑھ جائے گی۔

کاریگروں کی تعداد	دِنوں کی تعداد
6	4
3	8

یہاں $6:3 \neq 4:8$

بلکہ $6:3 = 8:4$

یا $6:3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$

یعنی کاریگروں کی تعداد میں وُہی نسبت ہے جو دِنوں کی تعداد کے ضربی معکوسوں میں ہے۔ اِس قِسم کے تناسب کو ہم تناسب معکوس کہتے ہیں۔

عمومی طور پہ ہم کہ سکتے ہیں کہ چار مقداروں a , b , c , d میں تناسب معکوس ہوگا اگر

$$a : b :: \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$$

یا $a : b = \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$

یا $a : b = d : c$

دی گئی مثال میں اگر 6 کاریگروں کی بجائے 8 کاریگر کام پر لگائے جائیں تو کام کِتنے دِنوں میں ختم ہوگا ؟

فرض کیا مطلوبہ دنوں کی تعداد = x

کاریگروں کی تعداد	دِنوں کی تعداد
8	x
4	6

اس سے ہمیں مندرجہ ذیل تناسب حاصل ہوتا ہے

$$x : 6 :: \frac{1}{8} : \frac{1}{4}$$

یا $x : 6 = \frac{1}{8} : \frac{1}{4}$

یا $\frac{x}{6} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}$

یا $\frac{x}{6} = \frac{4}{8}$

یا $x = \frac{1}{2} \times 6$

یا $x = 3$

پس معلوم ہوا کہ 8 کاریگر کام کو 3 دِنوں میں ختم کریں گے۔
تناسب راست اور تناسب معکوس کے طریقوں کی مزید وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1 :

اگر 15 کوئنٹل گندم کی قیمت 2812.50 روپے ہو تو 3750 روپے میں کتنی گندم ملے گی ؟

حل :

زیادہ روپوں میں زیادہ گندم ملے گی اس لیے یہ تناسب راست کا سوال ہے۔ فرض کیا گندم کی مطلوبہ مقدار x کوئنٹل ہے۔

قیمت (روپوں میں)	گندم کی مقدار (کوئنٹلوں میں)
3750	x
2812.50	15

یا $x : 15 = 3750 : 2812.50$

یا (خاصیت تناسب) $(2812.50)\, x = 15 \times 3750$

$$x = \frac{15 \times 3750}{2812.50}$$

یا $$x = \frac{15 \times 3750 \times 100}{281250}$$

یا $$x = \frac{150 \times 3750}{28125}$$

یا $$x = \frac{6 \times 3750}{1125}$$

$$\therefore \quad x = 20$$

پس گندم کی مطلوبہ مقدار = 20 کوئنٹل

نوٹ 1

ہم دی ہوئی مقداروں اور نامعلوم مقدار x کو جدول میں اِس طرح سے ترتیب دیتے

ہیں کہ x بائیں طرف سے پہلے مقام پر ہو۔

نوٹ 2

مندرجہ بالا تناسب کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$x : 3750 :: 15 : 2812.50$$

یا

$$\frac{x}{3750} = \frac{15}{2812.50}$$

مثال 2:

25 کاریگر ایک کام کو 7 دِن میں ختم کرتے ہیں اسی کام کو 5 دن میں ختم کرنے کے لیے کتنے کاریگر درکار ہوں گے؟

حل:

کم دنوں میں کام ختم کرنے کے لیے زیادہ کاریگر درکار ہوں گے۔ اس لیے یہ تناسب معکوس کا سوال ہے۔

دِنوں کی تعداد	کاریگروں کی تعداد
5	x
7	25

$x : 25 :: 7 : 5$ (تناسب معکوس کی خاصیت)

یا $x : 25 = 7 : 5$

یا $5x = 25 \times 7$ (خاصیت تناسب)

یا $x = \frac{25 \times 7}{5}$

$\therefore \quad x = 35$

پس کاریگروں کی مطلوبہ تعداد = 35

مثال 3

ایک ہوائی جہاز ایک فاصلہ 540 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے $1\frac{1}{2}$ گھنٹے میں طے کرتا ہے۔ جہاز کی رفتار کو کتنا زیادہ کیا جائے کہ وہی فاصلہ $1\frac{1}{4}$ گھنٹے میں طے ہو جائے؟

حل:

فرض کیجیے جہاز کی نئی رفتار ' x ' کلومیٹر فی گھنٹہ ہے

رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ	وقت منٹوں میں
x	75
540	90

$x : 540 :: 90 : 75$ (تناسب معکوس کی خاصیت)

یا

$x : 540 = 90 : 75$

یا (خاصیت تناسب) $75x = 540 \times 90$

پس

$$x = \frac{540 \times 90}{75}$$

$$= \frac{540 \times 6}{5}$$

$$= 108 \times 6$$

$$= 648$$

لہٰذا رفتار میں زیادتی

$$= 648 - 540$$

$$= 108$$

پس رفتار میں زیادتی = 108 کلومیٹر فی گھنٹہ

مشق 4.1

1۔ دی ہوئی نسبتوں کو معیاری صورت میں تحویل کیجیے۔

(i) $30 : 45$ (ii) $\frac{2}{5} : \frac{3}{25}$ (iii) $1\frac{4}{9} : 5\frac{1}{5}$

(iv) $\frac{9}{11} : \frac{13}{15}$ (v) $\frac{7}{12} : 1\frac{5}{16}$ (vi) $3.5 : 4.5$

(vii) $4 : 0.001$ (viii) $2.5 : 0.015$

2۔ دی ہوئی مقداروں میں نسبت کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(i) 1 پیسہ ، 1 روپیہ (ii) 2 روپے ، 40 پیسے

(iii) 12.50 روپے، 40.75 روپے (iv) 100 گرام ، 5 کلوگرام

(v) 45 کلوگرام، 2 کوئنٹل (vi) 1 میٹر ، 30 سینٹی میٹر

(vii) 60 میٹر ، 5 کلومیٹر (viii) 5 لِٹر، 15 ملی لِٹر

(ix) 15 ملی گرام، 20 ڈیسی گرام

(x) 4 میٹر فی سیکنڈ کی رفتار ، 350 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار

3۔ اگر ایک آدمی کی سالانہ آمدن 37500 روپے اور خرچ 31500 روپے ہو تو مندرجہ ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) اُس کی آمدن اور خرچ میں

(ii) اُس کی بچت اور آمدن میں

4۔ دو کاروں کی قیمت خرید بالترتیب 63000 روپے اور 112500 روپے تھی۔ 6 ماہ بعد ہر کار کی قیمت 13500 روپے کم ہوگئی۔ اِن کی قیمتوں میں مندرجہ ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) خریدنے کے وقت (ii) 6 ماہ بعد

5۔ اگر دو مربّعی علاقوں کے اضلاع کی لمبائیاں 6 سم اور 8 سم ہوں تو مندرجہ ذیل نسبتیں معلوم کیجیے:۔

(i) مُربّعی علاقوں کے احاطوں میں

(ii) مُربّعی علاقوں کے رقبوں میں

6۔ ایک کار نے 210 کلومیٹر کا فاصلہ $3\frac{1}{2}$ گھنٹے میں طے کیا جبکہ ایک گاڑی نے 45 کلومیٹر کا فاصلہ 50 منٹ میں طے کیا۔ دونوں کی رفتاروں میں نسبت معلوم کیجیے۔

7۔ افضل نے 2000 روپے کی آمدنی میں سے 1250 روپے خرچ کیے۔ جبکہ اکرم نے 3000 روپے کی آمدن میں سے 1800 روپے خرچ کیے۔ آمدن کے لحاظ سے کِس کا خرچ نسبتاً کم ہے۔

8۔ جس وقت 36 ڈیسی میٹر اونچے بانس کا سایہ 45 ڈیسی میٹر تھا۔ اُس وقت بادشاہی مسجد کے مینار کا سایہ 610 ڈیسی میٹر تھا۔ بتایے مینار کتنا بلند ہے۔ مسجد اور بانس کا محل وقوع تقریباً ایک ہی ہے۔

9۔ ایک نقشے کی سکیل 120 : 1 ہے۔ اس مکان کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے جس کی نقشے پر پیمائش 5 cm × 3.75 cm ہے۔

10۔ صابن کی 20 ٹکیوں کی قیمت 50 روپے ہے۔ 25 ٹکیوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

11۔ 40 کلوگرام چاول 270 روپے کے آتے ہیں۔ 65 کلوگرام چاول کتنے کے آئیں گے؟

12۔ اگر 8 کوئنٹل گندم کی قیمت 1720 روپے ہو تو 1182.50 روپے کی کتنی گندم ملے گی؟

13۔ پانچ نل ایک تالاب کو 40 منٹ میں بھر دیتے ہیں۔ ایک نل خراب ہونے کی صورت میں باقی نل اُسے کتنی دیر میں بھریں گے؟

14۔ ایک گاڑی 48 کلومیٹر فی گھنٹا کی رفتار سے ایک فاصلہ 50 منٹ میں طے کرتی ہے۔ وہی فاصلہ 40 منٹ میں طے کرنے کے لیے اُسے کس رفتار سے چلنا پڑے گا؟

15۔ ایک فوجی کیمپ میں 24 دن کی خوراک موجود ہے۔ اگر فی کس راشن 3 : 2 کی نسبت میں کم کر دیا جائے تو خوراک کتنے دنوں کے لیے کافی ہوگی؟

16۔ ایک جائیداد کے $\frac{2}{3}$ حصّے کی قیمت $2\frac{1}{2}$ لاکھ روپے ہے۔ اُس کے $\frac{4}{5}$ حصّے کی قیمت کیا ہوگی؟

17۔ اگر 6 آدمی کسی کام کو 16 دنوں میں کرتے ہوں تو بتایئے اُسی کام کو 8 آدمی کتنے دنوں میں مکمل کریں گے؟

18۔ ایک کار کے پہیّے کا رداس 3 ڈیسی میٹر ہے۔ ایک فاصلہ طے کرنے میں اس کا پہیّہ 100 چکر لگاتا ہے۔ ایک ٹرک کے پہیّے کا محیط π 10 ڈیسی میٹر ہے۔ وہی فاصلہ طے کرنے میں ٹرک کا پہیّہ کتنے چکر لگائے گا۔

19۔ ایک فرش پر 10 cm × 20 cm پیمائش کی 900 ٹائلیں لگتی ہیں۔ اس فرش پر 20cm × 15cm پیمائش کی ٹائلیں کتنی لگیں گی؟

4.7 تناسب مُرکّب (Compound Proportion)

بعض اوقات ہمیں ایسے سوالات حل کرنا پڑتے ہیں جن میں بیک وقت ایک سے

زیادہ تناسبوں سے واسطہ پڑتا ہے۔ ایسی صورتوں میں "تناسبوں کے باہمی تعلق کو تناسب مُرکب کہتے ہیں۔

تناسب مُرکب سے متعلقہ سوالات کے حل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1

15 مشینیں 6 روز میں 360 سویٹر تیار کرتی ہیں۔ اگر 3 مشینیں خراب ہوجائیں تو باقی مشینیں 8 روز میں کتنے سویٹر تیار کریں گی؟

حل:

یہاں سویٹروں کی تعداد کا انحصار مشینوں کی تعداد اور دِنوں کی تعداد دونوں پر ہے۔ چونکہ زیادہ مشینیں زیادہ سویٹر تیار کرتی ہیں اور دِنوں کی تعداد زیادہ ہونے سے بھی زیادہ سویٹر تیار ہوجاتے ہیں اِس لیے سوال میں موجود دونوں تناسب، تناسب راست ہیں۔ ہم اِس سوال کو دو مرحلوں میں حل کرتے ہیں۔ پہلے دنوں کی تعداد کو تبدیل کیے بغیر اور پھر تبدیل کرکے۔

فرض کیجیے 12 مشینیں 6 دنوں میں x سوئیٹر تیار کرتی ہیں۔ اِس صُورت میں تناسب یوں ہوگا۔

سویٹروں کی تعداد	مشینوں کی تعداد
x	12
360	15

$$x : 12 :: 360 : 15$$

$$\frac{x}{12} = \frac{360}{15} = 24 \quad \text{——— (1)}$$

یا

$$x = 24 \times 12$$

$$x = 288$$

لہٰذا سویٹروں کی تعداد = 288

اَب سوال یوں ہوا کہ 12 مشینیں 6 روز میں 288 سویٹر تیار کرتی ہیں۔ اِتنی ہی مشینیں 8 روز میں کتنے سویٹر تیار کریں گی؟

تناسب یوں ہوگا

دن	سویٹروں کی تعداد
8	x
6	288

یعنی $x : 8 :: 288 : 6$

$$\frac{x}{8} = \frac{288}{6} \qquad \text{———— (2)}$$

یا $x = \frac{288}{6} \times 8$

یا $x = 48 \times 8$

$= 384$

پس سویٹروں کی مطلوبہ تعداد $= 384$

ضروری نوٹ :

مندرجہ بالا حل دیکھنے سے ہمیں ایسے سوالات حل کرنے کا مختصر طریقہ حاصل ہوجاتا ہے۔

مساوات (2) کی رُو سے

$$\frac{x}{8} = \frac{288}{6} \qquad \text{———— (3)}$$

لیکن مساوات (1) سے

$$288 = \frac{360 \times 12}{15}$$

288 کی یہ قیمت مساوات (3) میں درج کرنے سے

$$\frac{x}{8} = \frac{360 \times 12}{15} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{360 \times 12}{15 \times 6}$$

یا

$$\frac{x}{12 \times 8} = \frac{360}{15 \times 6} \qquad \text{———— (4)}$$

پس دونوں تناسبوں کو اکھٹا کر کے یوں لکھ سکتے ہیں:۔

سویٹروں کی تعداد ⟵	x	360
مشینوں کی تعداد ⟵	12	15
دِنوں کی تعداد ⟵	8	6

——(5)

اس مرکب تناسب کا مطلب یہ ہے کہ سویٹروں کی تعداد مشینوں کی تعداد کے متناسب بھی ہے اور دِنوں کی تعداد کے متناسب بھی۔
یعنی

$$x : 12 :: 360 : 15$$

اور

$$x : 8 :: 360 : 6$$

مساوات (4) اور (5) کا موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (4) کے بائیں جانب شمار کنندہ x ہے اور مخرج '8×12' ہے جو تناسب (5) میں x کے کالم والے باقی دو اعداد کا ہی حاصل ضرب ہے۔
اس طرح مساوات (4) کے دائیں جانب شمار کنندہ 360 ہے اور مخرج '6×15' ہے جو تناسب (5) میں 360 والے کالم میں باقی دو اعداد کا حاصل ضرب ہے۔
عمومی طور پر
اگر تناسب مرکب کے ارکان یوں ہوں :

x	c
a	d
b	e

تو

$$\frac{x}{ab} = \frac{c}{de}$$

$$\therefore x = \frac{abc}{de}$$

اگر کسی سوال میں دو سے زیادہ تناسب ہوں تو اُس کے لیے اِس مختصر طریقے کو آسانی سے توسیع دی جاسکتی ہے۔

اگر مرکب تناسب میں کوئی تناسب معکوس ہو تو اُس کے ارکان کے ضربی معکوس لے کر اس مختصر طریقہ کو استعمال کرسکتے ہیں۔

وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثالیں دیکھیے۔

مثال 2 :

15 مشینیں 8 گھنٹے روزانہ چلنے سے 6 روز میں 360 سویٹر تیار کرتی ہیں۔ 3 مشینیں خراب ہوجائیں تو باقی مشینوں کو 10 گھنٹے روزانہ چلاکر 8 دنوں میں کتنے سویٹر بُنے جاسکیں گے؟

حل :

یہاں مثال 1 کے مقابلے میں ایک تناسب (روزانہ اوقات) کا اضافہ ہے

فرض کیا مطلوبہ سویٹروں کی تعداد = x

مرکب تناسب یوں ہوگا

سویٹروں کی تعداد ←	x	360	
مشینوں کی تعداد ←	12	15	(تناسب راست)
دنوں کی تعداد ←	8	6	(تناسب راست)
روزانہ اوقات کار ←	10	8	(تناسب راست)

پس

$$\frac{x}{12 \times 8 \times 10} = \frac{360}{15 \times 6 \times 8}$$

یا

$$x = \frac{360 \times 12 \times 8 \times 10}{15 \times 6 \times 8}$$

$$= 480$$

لہٰذا سویٹروں کی مطلوبہ تعداد = 480

مثال 3 :

ایک ٹھیکیدار نے ایک عمارت 45 دن میں بنانے کا ٹھیکہ لیا۔ اُس نے کام پر 36 آدمی لگائے۔ 25 دن میں کام کا صرف $\frac{1}{3}$ حصّہ ختم ہوا۔ بتایئے کہ وہ کتنے آدمی اور کام پر لگائے کہ کام وقت پر ختم ہو جائے ؟

حل :

فرض کیجیے بقایا 20 دِنوں کے لیے کُل x آدمی کام پر لگانے کی ضرورت ہے۔ جبکہ بقایا کام $\frac{2}{3}$ ہے۔

مُرکب تناسب یوں ہوگا:۔

آدمیوں کی تعداد ⟵	x	36
کام کی مقدار ⟵	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
دنوں کی تعداد ⟵	20	25

آدمیوں کی تعداد اور کام کی مقدار میں تناسب راست ہے۔ کیونکہ زیادہ آدمی زیادہ کام کرتے ہیں۔ جبکہ آدمیوں کی تعداد اور دنوں کی تعداد میں تناسب معکوس ہے کیونکہ زیادہ آدمی تھوڑے دنوں میں کام کرتے ہیں۔

ہم تناسب کو یوں لکھیں گے۔

آدمیوں کی تعداد ⟵	x	36
کام کی مقدار ⟵	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
دنوں کی تعداد ⟵	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$

اس لیے

$$\frac{x}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{20}} = \frac{36}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{25}}$$

یا

$$\frac{x \times 3 \times 20}{2} = 36 \times 3 \times 25$$

یا

$$30x = 36 \times 75$$

یا

$$x = \frac{36 \times 75}{30}$$
$$= 90$$

پس بقایا کام کے لیے 90 آدمیوں کی ضرورت ہے۔

جتنے آدمی کام پر اور لگانے پڑیں گے

$= 90 - 36$

$= 54$

پس مطلوبہ آدمی $= 54$

نوٹ: چونکہ

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = a \times \frac{b}{1} = ab$$

اس لیے ایک عدد کو دوسرے عدد کے ضربی مقسوم پر تقسیم کرنے کی بجائے ان کا حاصل ضرب بھی لے سکتے ہیں۔ پس اوپر کے سوال کو یوں بھی حل کر سکتے ہیں۔

آدمیوں کی تعداد $\longrightarrow$ x 36

(تناسب راست) کام کی مقدار $\longrightarrow$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$

(تناسب معکوس) دنوں کی تعداد $\longrightarrow$ 20 25

اس لیے

$$\frac{x}{\frac{2}{3}} \times 20 = \frac{36}{\frac{1}{3}} \times 25$$

یا

$$\frac{x \times 20 \times 3}{2} = 36 \times 3 \times 25$$

یا

$$30x = 36 \times 75$$

$$\therefore \quad x = \frac{36 \times 75}{30} = 90$$

پس جتنے آدمی کام پر اور لگانے پڑیں گے

$= 90 - 36$

$= 54$

مطلوبہ آدمی $= 54$

پس عملی کام کے لیے مندرجہ ذیل ضابطہ حاصل ہوا

> تناسب راست کی صورت میں متناظرہ ارکان کو تقسیم کیجیے اور تناسب معکوس کی صورت میں متناظرہ ارکان کو ضرب دیجیے۔

مثال 4 :

25 آدمی 8 گھنٹے روزانہ کام کرکے ایک سڑک کو 63 دن میں مرمّت کرتے ہیں
45 آدمی 7 گھنٹے روزانہ کام کرکے اتنی ہی لمبی سڑک کو کتنے دِنوں میں مرمّت کریں گے ؟

حل :

فرض کیا دنوں کی مطلوبہ تعداد = x
مرکب تناسب یوں ہوگا

دنوں کی تعداد ⟵ x   63
(تناسب معکوس) آدمیوں کی تعداد ⟵ 45   25
(تناسب معکوس) روزانہ کام کا وقت ⟵ 7   8

یہاں دونوں تناسب تناسب معکوس ہیں

دن زیادہ   آدمی کم
دن زیادہ   روزانہ کام کا وقت کم

اس لیے
$$\frac{x}{\frac{1}{45} \times \frac{1}{7}} = \frac{63}{\frac{1}{25} \times \frac{1}{8}}$$

یا
$$x \times 45 \times 7 = 63 \times 25 \times 8$$

یا
$$x = \frac{63 \times 25 \times 8}{45 \times 7} = 40$$

پس دنوں کی مطلوبہ تعداد = 40

مشق 4.2

1. اگر 12 کاریگر 6 دنوں میں 2880 روپے کمائیں تو 8 کاریگر 9 دِنوں میں کتنے روپے کمائیں گے ؟
2. اگر 6 مزدور 6 دِنوں میں 6 مُربع ہیکٹو میٹر زمین پر سے گھاس کی کٹائی کریں

تو 10 مزدور 9 دِنوں میں کتنی زمین پر سے گھاس کاٹیں گے ؟

3۔ 16 آدمی 9 دِنوں میں 80 بکس بناتے ہیں۔ 15 آدمی 100 بکس کتنے دنوں میں بنائیں گے ؟

4۔ ایک چرواہے کو 10 مویشی 8 ہفتے تک چرانے کے عوض 500 روپے ادا کیے جاتے ہیں۔اُسے 12 مویشی 6 ہفتے چرانے کے لیے کیا ادا کرنا پڑے گا؟

5۔ 19 آدمی ایک کام کو $7\frac{1}{2}$ گھنٹے روزانہ کام کرکے 21 دِنوں میں ختم کرتے ہیں اُتنے ہی کام کو 45 آدمیوں نے اگر 7 دن میں ختم کرنا ہو تو انھیں روزانہ کتنے گھنٹے کام کرنا ہوگا ؟

6۔ اگر گندم کا بھاؤ 160 روپے فی کوئنٹل ہو تو ایک کنبے کا 16 دن کا خرچ 144 روپے ہے۔اگر بھاؤ 192 روپے فی کوئنٹل ہو جائے تو اِس کنبے کا 5 دِن کا خرچ کیا ہوگا ؟

7۔ اگر 12 آدمی 8 گھنٹے روزانہ کام کرکے ایک کام کو 21 دن میں ختم کریں تو بتایئے کہ 18 آدمی 7 گھنٹے روزانہ کام کرکے اُسی کام کو کتنے دنوں میں ختم کریں گے ؟

8۔ اگر 4 افراد کے کُنبے کا 40 دِن کا خرچ 2400 روپے ہو تو اِسی حساب سے 6 افراد کے کُنبے کے لیے 3150 روپے کتنے دنوں کے لیے کافی ہوں گے؟

9۔ 25 آدمی 8 گھنٹے روزانہ کام کرکے ایک کام کو 12 دِن میں ختم کرتے ہیں اگر 30 آدمیوں کو اتنا ہی کام 16 دن میں ختم کرنا ہو تو انھیں روزانہ کتنے گھنٹے کام کرنا پڑے گا؟

10۔ 63 آدمیوں کے پاس 8 ہیکٹو گرام فی آدمی فی یوم کے حساب سے 66 دن کی خوراک موجود ہے۔اگر 10 دن کے بعد 9 آدمی اور آجائیں تو بتایئے کہ ہر آدمی کو روزانہ کتنی خوراک دی جائے کہ باقی خوراک وقت معینہ پر ختم ہو؟

11۔ ایک ٹھیکیدار نے 40 کلومیٹر لمبی سڑک 75 دن میں بنانے کا ٹھیکہ لیا۔اُس نے 200 آدمی کام پر لگائے۔ 45 دن میں صرف 16 کلومیٹر سڑک تیار ہوئی۔ وہ کتنے آدمی اور لگائے کہ باقی کام وقت مقررہ پر ختم ہو جائے ؟

12۔ ایک ٹھیکیدار نے ایک عمارت 45 دن میں بنانے کا ٹھیکہ لیا اور 10 آدمی کام پر لگائے۔ 15 دن میں کام کا صرف $\frac{1}{4}$ حصہ ختم ہوا۔ وہ کتنے آدمی اور لگائے کہ کام ٹھیکے کی میعاد تک ختم ہو جائے ؟

13۔ 10 آدمی 8 گھنٹے روزانہ کام کر کے ایک کام کا $\frac{2}{5}$ حصہ 15 دن میں ختم کرتے ہیں۔ کتنے آدمی بقایا کام کو 10 گھنٹے روزانہ کام کر کے 12 دن میں ختم کریں گے ؟

14۔ 12 آدمی $7\frac{1}{2}$ گھنٹے روزانہ کام کر کے ایک کام کا $\frac{2}{3}$ حصہ 8 دن میں ختم کرتے ہیں۔ 10 آدمی کتنے گھنٹے روزانہ کام کر کے باقی کام 4 دن میں ختم کریں گے ؟

4.8 مسلسل نسبت (CONTINUED RATIO)

بعض اوقات دو سے زیادہ مقداروں کا باہم مقابلہ یا موازنہ کرنے کے لیے مسلسل نسبت کی ضرورت پڑتی ہے مثلاً تین اشیاء A ، B اور C کے وزن بالترتیب 25 کلو گرام ، 30 کلوگرام اور 35 کلوگرام ہیں۔ ان کے وزنوں میں تین مختلف نسبتیں ہیں۔

(i) A اور B کے وزنوں میں نسبت

(ii) B اور C کے وزنوں میں نسبت

(iii) A اور C کے وزنوں میں نسبت

یہ نسبتیں مندرجہ ذیل ہیں

A : B = 25 : 30

یا A : B = 5 : 6 (بائیں سے دائیں)

B : C = 30 : 35

یا B : C = 6 : 7

A : C = 25 : 35

یا A : C = 5 : 7

مندرجہ بالا تینوں نسبتوں کو اکٹھا یوں لکھا جاتا ہے۔

$$A : B : C = 25 : 30 : 35$$

یا $A : B : C = 5 : 6 : 7$

ایسی صُورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ A ‘ B اور C متناسب ہیں 5 ‘ 6 اور 7 کے سہولت کی خاطر ہم مساوات (1) کو یوں پڑھتے ہیں A نسبت B نسبت C برابر ہے 5 نسبت 6 نسبت 7 کے۔ 5 ، 6 اور 7 نسبت کے ارکان ہیں۔
اِسی طرح اگر

$$a : b : c : d = 3 : 5 : 7 : 11$$

تو متناظرہ ارکان کی ترتیب کو مدِ نظر رکھتے ہوئے

$$a : b = 3 : 5 \ , \ a : c = 3 : 7$$

$$a : d = 3 : 11 \ , \ b : c = 5 : 7$$

$$b : d = 5 : 11 \ , \ c : d = 7 : 11$$

4.9 دو یا دو سے زیادہ نسبتوں کو مسلسل نسبت کی شکل میں لکھنا
(TO WRITE TWO OR MORE RATIOS IN THE FORM OF CONTINUED RATIOS)

مثال 1 :

اگر $a : b = 6 : 7 , b : c = 7 : 9$

تو $a : b : c$ معلوم کیجیے۔

حل :

ہم دو نسبتوں کو مسلسل نسبت کی شکل میں تبھی لکھ سکتے ہیں جبکہ ہر دو نسبتوں میں ایک رُکن مشترک ہو۔ اِس مثال میں رُکن 'b' مشترک ہے۔

$$a : b : c$$

$$6 : 7$$

$$7 : 9$$

$$\overline{6 : 7 : 9}$$

اس لیے

$$a : b : c = 6 : 7 : 9$$

مثال 2 :

اگر $a : b = 4 : 7, b : c = 5 : 9$

تو $a : b : c$ معلوم کیجیے۔

حل :

پہلی نسبت میں 'b' کا متناظرہ رکن 7 ہے جبکہ دوسری میں 5 نیز 7 اور 5 باہم مفرد ہیں۔

دونوں نسبتوں میں 'b' کے متناظرہ ایک ہی رکن حاصل کرنے کے لیے ہم پہلی نسبت کے ارکان کو 5 سے اور دوسری نسبت کے ارکان کو 7 سے ضرب دیتے ہیں۔

اس طرح

$$a : b = 5 \times 4 : 5 \times 7 = 20 : 35$$

$$b : c = 7 \times 5 : 7 \times 9 = 35 : 63$$

اس لیے

$$a : b : c = 20 : 35 : 63$$

مندرجہ بالا عمل کو ہم یوں بھی ظاہر کرسکتے ہیں۔

$$\begin{array}{ccc} a & : b & : c \\ 4 & : 7 & \\ & 5 & : 9 \end{array}$$

یا

$$\begin{array}{l} a : b : c \\ 5 \times (4 : 7) \\ \quad 7 \times (5 : 9) \end{array}$$

یا

$$\begin{array}{ccc} a & : b & : c \\ 20 & : 35 & \\ & 35 & : 63 \\ \hline 20 & : 35 & : 63 \end{array}$$

اس لیے

$$a : b : c = 20 : 35 : 63$$

مثال 3 :

اگر $a : b = 11 : 16, b : c = 24 : 35$

تو $a : b : c$ معلوم کیجیے۔

حل :

یہاں 'b' کے متناظرہ ارکان 16 اور 24 باہم مفرد نہیں ہیں۔ ان کا ذواضعاف اقل 48 ہے اور

$$48 \div 16 = 3$$

$$48 \div 24 = 2$$

$$a : b : c$$

$$11 : 16$$

$$24 : 35$$

یا

$$a : b : c$$

$$3 \times (11 : 16)$$

$$2 \times (24 : 35)$$

یا

$$a : b : c$$

$$33 : 48$$

$$48 : 70$$

$$33 : 48 : 70$$

اس لیے $a : b : c = 33 : 48 : 70$

مثال 4 :

اگر $a : b = 12 : 13, a : c = 18 : 23$

تو $a : b : c$ معلوم کیجیے

حل :

یہاں 'a' دونوں نسبتوں میں مشترک رُکن ہے۔اس کے متناظرہ ارکان 12 اور 18 ہیں جن کا ذواضعافِ اقل 36 ہے اور

$36 \div 12 = 3$

$36 \div 18 = 2$

پس $a : b : c$

$12 : 13$

$18 \quad : 23$

یا $a : b : c$

$3 \times (12 : 13)$

$2 \times (18 \quad : 23)$

یا $a : b : c$

$36 : 39$

$36 \quad : 46$

$36 : 39 : 46$

اس لیے $a : b : c = 36 : 39 : 46$

مثال 5 :

نسبت $92 : 161 : 253$ کو میعاری (مختصر ترین) شکل میں لکھیے۔

حل :

دی ہوئی نسبت کو میعاری شکل میں تحویل کرنے کے لیے ہم اس کے ارکان کو ان کے عادِ اعظم پر تقسیم کرتے ہیں۔

```
92 ) 161 ( 1
     92
     ----
     69 ) 92 ( 1
          69
          ----
          23 ) 69 ( 3
               69
               ----
                0

23 ) 253 ( 11
     23
     ----
      23
      23
     ----
      0
```

چونکہ دی ہوئی نسبت کا عادِ اعظم 23 ہے اور

$92 \div 23 = 4$

$161 \div 23 = 7$

$253 \div 23 = 11$

اِس لیے $92 : 161 : 253 = 4 : 7 : 11$

مثال 6 :

$a : b = 5 : 6,\ b : c = 8 : 15,\ c : d = 20 : 27$

$a : b : c : d$ معلوم کیجیے۔

حل :

پہلے ہم $a : b : c$ معلوم کرتے ہیں
پہلی دو نسبتوں میں 'b' کے متناظرہ ارکان 6 اور 8 ہیں جن کا ذواضعاف اقل 24 ہے اور

$24 \div 6 = 4$

$24 \div 8 = 3$

$a : b : c$

$5 : 6$

$8 : 15$

یا $a : b : c$

$4 \times (5 : 6)$

$3 \times (8 : 15)$

یا $a : b : c$

$20 : 24$

$24 : 45$

$20 : 24 : 45$

a : b : c اور c : d میں 'c' کے متناظرہ ارکان 20 اور 45 کا ذواضعاف اقل 180 اور

$$180 \div 45 = 4$$

$$180 \div 20 = 9$$

a : b : c : d

20 : 24 : 45

20 : 7

یا

a : b : c : d

4 × (20 : 24 : 45)

9 × (20 : 7)

یا

a : b : c : d

80 : 96 : 180

180 : 63

80 : 96 : 180 : 63

اس لیے

a : b : c : d = 80 : 96 : 180 : 63

4.10 دی ہوئی مقدار کی نسبتی تقسیم

(DIVIDING A QUANTITY IN A GIVEN RATIO)

مثال 1 :

آٹھویں جماعت کے سالانہ امتحان میں اوّل، دوم اور سوم آنے والے طلبہ میں 450 روپے کی رقم بالترتیب 1 : 2 : 3 (بائیں سے دائیں) کی نسبت میں تقسیم کی گئی۔ بتائیے ہر طالبِ علم کو کتنی مالیت کا انعام ملا۔

حل :

نسبتی مجموعہ

= 3 + 2 + 1 = 6

اگر 450 روپے 6 برابر حصّوں میں تقسیم کیے جائیں تو

ہر حصّہ

$$\frac{450}{6} = 75$$ (روپے)

پس اوّل انعام کی مالیت

$= 3 \times 75$

$= 225$ (روپے)

دوم انعام کی مالیت

$= 2 \times 75$

$= 150$ (روپے)

سوم انعام کی مالیت

$= 1 \times 75$

$= 75$ (روپے)

نوٹ : مندرجہ بالا عمل کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

اوّل انعام کی مالیت

$$= 3 \times \frac{450}{3 + 2 + 1}$$

$= 225$ (روپے)

دوم انعام کی مالیت

$$= 2 \times \frac{450}{3 + 2 + 1}$$

$= 150$ (روپے)

سوم انعام کی مالیت

$$= 1 \times \frac{450}{3 + 2 + 1}$$

$= 75$ (روپے)

اس عمل سے مندرجہ ذیل کُلیہ حاصل ہوا۔

اگر کسی مقدار N کو
a : b : c کی نسبت میں تقسیم کرنا ہو تو
پہلا حصّہ
$$= a \times \frac{N}{S}$$
دوسرا حصّہ
$$= b \times \frac{N}{S}$$
تیسرا حصّہ
$$= c \times \frac{N}{S}$$
جہاں $S = a + b + c$
a + b + c کو نسبتی مجموعہ کہتے ہیں

بعض اوقات کسی مقدار یا عدد کے مطلوبہ حصّوں میں نسبت صریحًا نہیں دی جاتی۔ البتہ ایسے ربط دیے ہوتے ہیں کہ مطلوبہ نسبت معلوم ہوسکے۔ وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثالیں دیکھیے۔

مثال 1 :

تین طلبہ عون، عثمان اور عمر میں 340 روپے کی رقم اِس طرح تقسیم کی گئی کہ عثمان کو عمر کے حصّہ سے تین گُنا رقم ملی جبکہ عون کو عثمان کے حصّہ سے $1\frac{1}{2}$ گُنا۔ ہر ایک کے حصّہ میں کتنی رقم آئی ؟

حل :

فرض کیا عمر کے حصّہ کی رقم 1 روپیہ ہے۔
عثمان کا حصّہ

$$= 3 \times 1$$
$$= 3$$

عون کا حصّہ

$= 3 \times 1\frac{1}{2}$

$= 3 \times \frac{3}{2}$

$= \frac{9}{2}$

عون ، عثمان اور عمر کے حصّوں میں نسبت

$= \frac{9}{2} : 3 : 1$

(ہر رکن کو 2 سے ضرب دینے سے)

$= 9 : 6 : 2$

نسبتی مجموعہ

$= 9 + 6 + 2$

$= 17$

عون کا حصّہ

$= 9 \times \frac{340}{17}$

$= 180$ (روپے)

عثمان کا حصّہ

$= 6 \times \frac{340}{17}$

$= 120$ (روپے)

عمر کا حصّہ

$= 2 \times \frac{340}{17}$

$= 40$ (روپے)

مثال 2 :

عدد 780 کو تین حصّوں میں اِس طرح تقسیم کیجیے کہ پہلے حصّے کا دو گنا، دوسرے حصّے کا تین گنا اور تیسرے حصّے کا چار گنا برابر ہوں۔

حل :

بموجب شرط سوال

$$2 \times (\text{پہلا حصّہ}) = 3 \times (\text{دوسرا حصّہ}) = 4 \times (\text{تیسرا حصّہ})$$

2, 3, 4 کا ذواضعاف اقل 12 ہے

اِس لیے

$$\frac{2 \times (\text{پہلا حصّہ})}{12} = \frac{3 \times (\text{دوسرا حصّہ})}{12} = \frac{4 \times (\text{تیسرا حصّہ})}{12}$$

یا

$$\frac{\text{پہلا حصّہ}}{6} = \frac{\text{دوسرا حصّہ}}{4} = \frac{\text{تیسرا حصّہ}}{3}$$

پس مطلوبہ حصّوں میں نسبت

$= 6 : 4 : 3$

نسبتی مجموعہ

$= 6 + 4 + 3$

$= 13$

پس پہلا حصّہ

$= 6 \times \frac{780}{13}$

$= 360$

دوسرا حصّہ

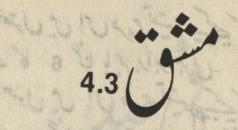
$= 4 \times \frac{780}{13}$

$= 240$

تیسرا حصّہ

$= 3 \times \frac{780}{13}$

$= 180$

a : b : c معلوم کیجیے جبکہ

1 - a : b = 4 : 7 , b : c = 7 : 9

2 - a : b = 11 : 13 , b : c = 13 : 17

3 - a : b = 3 : 5 , b : c = 3 : 7

4 - a : b = 4 : 15 , a : c = 4 : 23

5 - a : b = 4 : 5 , b : c = 7 : 5

6 - a : b = 9 : 16 , b : c = 20 : 27

7 - a : b = 5 : 9 , b : c = 12 : 17

8 - a : b = 20 : 23 , b : c = 69 : 71

دی ہوئی نسبتوں کو معیاری صورت میں لکھیے۔

9 - 51 : 85 : 136

10 - 90 : 165 : 270

11 - 185 : 296 : 407

12 - 175 : 245 : 420

a : b : c : d معلوم کیجیے جبکہ

13 - a : b = 4 : 7 , b : c = 5 : 8 , c : d = 6 : 11

14 - a : b = 5 : 6 , b : c = 6 : 13 , c : d = 26 : 29

15 - a : b = 11 : 12 , b : c = 18 : 23 , c : d = 46 : 47

16 - 420 کو 4 , 7 اور 9 کی نسبت میں تقسیم کیجیے۔

17 - 620 کو 3 حصوں میں اِس طرح تقسیم کیجیے کہ پہلے حصے کا دوگنا، دوسرے حصے کا تین گُنا اور تیسرے حصے کا 5 گُنا باہم برابر ہوں۔

18 - 936 کو تین حصّوں میں اِس طرح تقسیم کیجیے کہ پہلے کا تین گُنا، دوسرے کا 4 گُنا اور تیسرے کا 6 گُنا باہم برابر ہوں۔

19 - 928 کو 4 حصّوں میں اِس طرح تقسیم کیجیے کہ پہلے کا دو گُنا، دوسرے کا تین گنا تیسرے کا 4 گُنا اور چوتھے کا 8 گُنا باہم برابر ہوں۔

20 - اسلم، اشرف اور اکرم نے ایک کاروبار میں بالترتیب 2500 روپے، 5000 روپے اور 7500 روپے لگائے۔ 2454 روپے کے منافع میں ہر ایک کا حصّہ معلوم کیجیے۔

21 - جوّاد اور نبیل نے مشترکہ کاروبار شروع کیا۔ جوّاد نے 9000 روپے 10 ماہ کے لیے اور نبیل نے 5000 روپے ایک سال کے لیے لگائے۔ 2400 روپے کے منافع میں سے ہر ایک کو کتنا مِلا؟

22 - 30 روپے اور 40 روپے فی کلوگرام والی چائے کی دو قسمیں 2 اور 3 کی نسبت میں مِلائی گئیں۔ 30 کلوگرام آمیزے کی کیا قیمت ہوگی؟

23 - ایک ٹھیکیدار کے پاس 40 مزدور ہیں اور ایک دوسرے ٹھیکیدار کے پاس 75 مزدور۔ وہ دونوں روزانہ جو اُجرتیں مزدوروں کو دیتے ہیں ان میں 3 اور 5 کی نسبت ہے۔ دونوں ٹھیکیداروں کی اداکردہ اُجرتوں میں فی مزدور فی یوم نسبت معلوم کیجیے۔

24 - 2415 روپے کے منافع کو تین حصّہ داروں ارشد، شاہد اور عمر میں اِس طرح تقسیم کیجیے کہ ارشد کے ہر 4 روپے کے مقابلے میں شاہد کو 5 روپے مِلیں اور شاہد کے ہر 9 روپے کے مقابلے میں عمر کو 16 روپے مِلیں۔

25 - 3550 روپے کی رقم شازیہ، مہوش اور حِنا میں اِس طرح تقسیم کیجیے کہ شازیہ کے ہر 5 روپے کے مقابلے میں مہوش کو 6 روپے مِلیں اور مہوش کے ہر 8 روپے کے مقابلہ میں حِنا کو 9 روپے ملیں۔

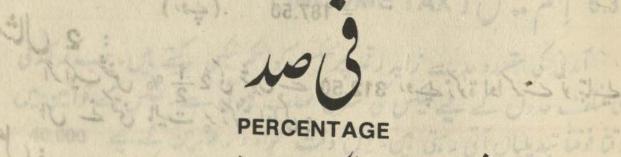
باب 5

فی صد

PERCENTAGE

(زکوٰۃ ، نفع ونقصان اور ٹیکسوں میں فی صد کا استعمال)

ZAKAT, LOSS, PROFIT AND USE OF PERCENTAGE IN TAXES

5.1 زکوٰۃ ZAKAT

قرآن کریم میں نماز کے ساتھ ساتھ زکوٰۃ ادا کرنے کی تاکید کی گئی ہے
زکوٰۃ مال کو پاک کرتی ہے اور صدقات وخیرات کی ادائیگی مال کو نقصان سے بچاتی ہے اور بلاؤں سے محفوظ کرتی ہے۔
زکوٰۃ کی شرح $2\frac{1}{2}\%$ ہے۔ جسے مقررہ اصولوں کے مطابق ادا کرنا ہوتا ہے اور اس طرح جمع ہونے والی رقم مستحقین میں تقسیم کی جاتی ہے۔

مثال 1 :

ایک شخص نے $2\frac{1}{2}\%$ کے حساب سے 7500 روپے کے مال پر زکوٰۃ دینی ہے بتایئے اُسے کتنی زکوٰۃ اَدا کرنی ہوگی ؟

حل :

مالیت جس پر زکوٰۃ ادا کرنا ہے = 7500 روپے

شرح زکوٰۃ

$$= 2\frac{1}{2}\%$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{1}{100}$$

قابلِ ادا زکوٰۃ

$$= 7500 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{375}{2}$$

$= 187.50$ (روپے)

مثال 2 :

اگر ایک شخص $2\frac{1}{2}\%$ کی شرح سے 312.50 روپے زکوٰۃ ادا کرے تو بتایئے اس نے کتنی مالیت پر زکوٰۃ ادا کی ؟

حل :

شرح زکوٰۃ

$$= 2\frac{1}{2}\%$$

$$= \frac{5}{2}\%$$

زکوٰۃ جتنی ادا کی

$= 312.50$ (روپے)

کل مالیت کا $\frac{5}{2}\%$

$= 312.50$ (312.50 روپے)

کل مالیت جس پر زکوٰۃ ادا کی

$$= 312.50 \times 100 \times \frac{2}{5}$$

$= 12500$ (12500 روپے)

5.2 ٹیکس TAX

حکومت شہریوں کو جو سہولیات فراہم کرتی ہے اُن کی فراہمی پر خرچ آنے والے سرمایہ کا ایک بڑا حصہ شہریوں سے مختلف ٹیکسوں کی شکل میں وصول کیا جاتا ہے ان ٹیکسوں کی مختلف صورتیں ہیں۔ مثلاً کسی شخص کو جو آمدنی حاصل ہوتی ہے اُس پر انکم ٹیکس، جائیداد بنانے پر جائیداد ٹیکس، کسی میونسپل حدود میں سامان لانے یا لے جانے پر محصول چونگی، گاڑیوں کے مالکان سے روڈ ٹیکس، زمینداروں، کاشتکاروں سے آبیانہ اور مالیہ وصول کیا جاتا ہے۔ یہاں ہم صرف انکم ٹیکس اور پراپرٹی کے بارے میں پڑھیں گے۔

5.3 اِنکم ٹیکس (INCOME TAX)

آمدنی کی مقررہ حد سے زاید رقم پر ٹیکس کو انکم ٹیکس کہتے ہیں۔ جب کہ آمدنی کی مختلف حدوں کے لیے ٹیکس کی شرح مختلف ہوتی ہے۔ ٹیکس کے قوانین میں وقتاً فوقتاً تبدیلیاں آتی رہتی ہیں۔ اِس وقت تنخواہ دار ملازمین کے لیے 40,000 روپے سالانہ تک کی آمدنی پر جب کہ کاروباری حضرات کے لیے 30,000 روپے تک سالانہ آمدنی پر انکم ٹیکس معاف ہے۔

5.4 قابلِ ٹیکس آمدنی (TAXABLE INCOME)

اگر کسی تنخواہ دار شخص کی سالانہ آمدنی 40,000 روپے سے زیادہ اور ایک لاکھ روپے سے کم ہو تو کُل آمدنی میں سے 40,000 روپے کم کرنے سے قابل ٹیکس آمدنی حاصل ہوگی۔ جب کہ اگر کسی کاروباری شخص کی سالانہ آمدنی 30,000 روپے سے زیادہ اور ایک لاکھ روپے سے کم ہو تو کُل آمدنی میں سے 30,000 روپے کم کرنے سے قابلِ ٹیکس آمدنی حاصِل ہوگی۔

مثلاً اگر کسی تنخواہ دار شخص کی سالانہ آمدنی 75,000 روپے ہے تو ٹیکس کے قابل آمدنی مندرجہ ذیل ہوگی۔

75000 - 40000

= 35000 (روپے)

اِسی طرح اگر کسی کاروباری آدمی کی سالانہ آمدنی 80,000 روپے ہے تو قابل ٹیکس آمدنی مندرجہ ذیل ہوگی۔

80000 - 30000

= 50000 (روپے)

ایک لاکھ یا ایک لاکھ سے زیادہ آمدنی کے لیے انکم ٹیکس کی شرح کا جدول

مندرجہ ذیل ہے۔

آمدنی	چھوٹ	قابلِ ٹیکس آمدنی	واجب الادا ٹیکس
1,00,000 روپے	24,000 روپے	76,000 روپے	11,500 روپے
		1,00,000 روپے	11,500 روپے + 76,000 روپے سے زاید کا 25 فی صد
		2,00,000, روپے	17,500 روپے + 1,00,000 روپے سے زاید کا 35 فی صد
		2,00,000 روپے سے زاید	52,500 روپے + 2,00,000 روپے سے زاید کا 45 فی صد

دو یا دو لاکھ سے زاید آمدنی والے لوگوں سے کُل انکم ٹیکس کا 10 فی صد بطور اضافی سَرچارج وصُول کیا جائے گا۔

نوٹ :

قابل ٹیکس آمدنی کا حساب کرنے سے پہلے زکوٰۃ کی شکل میں اَدا کی گئی رقم کو کُل آمدنی میں سے تفریق کر لیا جاتا ہے۔

مندرجہ ذیل مدّوں میں کی گئی سرمایہ کاری پر ٹیکس چھُوٹ دی جاتی ہے۔

(i) ڈیفنس سیونگ سرٹیفکیٹ۔

(ii) زندگی کے بیمہ کا پریمیم۔

(iii) صدقہ و خیرات۔

(iv) منظور شدہ کمپنیوں میں سرمایہ کاری۔

مندرجہ بالا مدّوں میں سرمایہ کاری پر چھوٹ کی حد کُل آمدنی کا % $33\frac{1}{3}$ فی صد یا 50,000 (اِن دونوں میں سے جو بھی کم ہو) تک ہوگی۔

$$\text{سرمایہ کاری پر چھوٹ} = \frac{\text{کل انکم ٹیکس} \times \text{سرمایہ کاری کی رقم}}{\text{کل آمدنی}}$$

کل ٹیکس سے سرمایہ کاری کی چھوٹ منہا کرنے سے واجبُ الادا ٹیکس معلُوم ہو جائے گا۔

اِسی طرح پراپرٹی ٹیکس، محصُول چونگی، روڈ ٹیکس، مالیہ اور آبیانہ وغیرہ کے لیے مختلف قوانین مقرر ہیں۔

مثال 1 :

اگر ایک تنخواہ دار شخص کی کُل آمدنی 64,000 روپے ہو تو بتایے اُسے کل کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

حل :

کل آمدنی = 64000 روپے

آمدنی جس پر انکم ٹیکس معاف ہے = 40000 روپے

قابل ٹیکس آمدنی :

64000 - 40000

= 24000 (روپے)

واجبُ الادا انکم ٹیکس بحساب % 10 :

$24000 \times \frac{10}{100}$

= 2400 (روپے)

مثال 2 :

ایک دکان دار کی سالانہ آمدنی 84,000 روپے ہے۔ بتایے اُسے کل کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

حل :

دکان دار کی سالانہ آمدنی = 84000 روپے

آمدنی جس پر انکم ٹیکس معاف ہے = 30000 روپے

قابلِ ٹیکس آمدنی :

84000 - 30000

= 54000 (روپے)

واجبُ الادا انکم ٹیکس بحساب % 10 :

$$54000 \times \frac{10}{100}$$

= 5400 (روپے)

مثال 3 :

ایک شخص کی ماہوار تنخواہ 9000 روپے ہے۔ اگر اُس نے 38000 روپے بچت کی سکیموں میں لگائے ہوں تو بتایے اُسے کُل کتنا اِنکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

حل :

ماہوار تنخواہ = 9000 روپے

سالانہ تنخواہ :

12×9000

$= 108000$ (روپے)

1,00,000 روپے تک چھوٹ = 24,000 روپے

قابل ٹیکس آمدنی :

$108,000 - 24000$

$= 84000$ (روپے)

76,000 روپے تک واجب الادا انکم ٹیکس = 11,500 روپے

بقیہ 8,000 روپے پر انکم ٹیکس بحساب % 25 :

$$8000 \times \frac{25}{100}$$

$= 2000$ (روپے)

کل واجب الادا انکم ٹیکس :

11500 روپے

2000 روپے

13500 روپے

بچت کی سکیموں میں کل آمدنی کا ایک تہائی لگایا جاسکتا ہے۔

1,08,000 روپے کی ایک تہائی :

$$108000 \times \frac{1}{3}$$

$= 36000$ (روپے)

گو اُس نے 38,000 روپے بچت کی سکیموں میں لگائے لیکن اِنکم ٹیکس میں چھوٹ ایک تہائی یعنی 36,000 روپے پر ہی ملے گی۔

لہٰذا اِنکم ٹیکس میں چھوٹ:

$$\frac{\text{کل انکم ٹیکس} \times \text{کُل بچت}}{\text{کل آمدنی}}$$

$$= \frac{36000 \times 13500}{108000}$$

$= 4500$ (روپے)

واجب الادا انکم ٹیکس:

$= 13500 - 4500$

$= 9000$ (روپے)

مثال 4:

ایک مکان کی مالیت پراپرٹی ٹیکس کے لیے 1,50,000 روپے تشخیص کی گئی ہے۔ اگر اس پر 1.5 % سالانہ کے حساب سے پراپرٹی ٹیکس ادا کرنا ہو تو بتایے سالانہ کتنا ٹیکس ادا کرنا پڑے گا۔

حل :

مکان کی مالیت = 1,50,000 روپے

پراپرٹی ٹیکس کی شرح = 1.5 % سالانہ

کل ٹیکس

$$= 1,50,000 \times \frac{1.5}{100}$$

$$= 1,50,000 \times \frac{15}{1000}$$

$$= 150 \times 15$$

$= 2250$ (روپے)

مثال 5 :

ایک شخص کو 1.5 % سالانہ کے حساب سے 5175 روپے پراپرٹی ٹیکس ادا کرنا پڑتا ہے اُس کی جائیداد کی کل مالیت کیا ہوگی۔

حل :

کل پراپرٹی ٹیکس = 5175 روپے

شرح ٹیکس = 1.5 % سالانہ

فرض کیا جائیداد کی کل مالیت x روپے ہے

تناسب یوں ہوگا

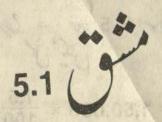
$$x : 100 :: 5175 : 1.5$$

$$1.5\,x = 5175 \times 100$$

یا $x = \dfrac{5175 \times 100}{1.5}$

یا $= 5175 \times 100 \times \dfrac{10}{15}$

یا $= 345,000$ (روپے)

مشق 5.1

1 - کمال الدین کو $2\frac{1}{2}\%$ کے حساب سے 76000 روپے کے مال پر کتنی زکوٰۃ ادا کرنی ہوگی۔

2 - شرف الدین 1,95,000 روپے کے مال پر $2\frac{1}{2}\%$ کی شرح سے زکوٰۃ ادا کرتا ہے۔ بتائیے اُسے کتنی زکوٰۃ ادا کرنا ہوگی۔

3 - $2\frac{1}{2}\%$ کے حساب سے 1,50,850 روپے کے مال پر کتنی زکوٰۃ ادا کرنا ہوگی

4 - اگر $2\frac{1}{2}\%$ سالانہ کے حساب سے 750 روپے زکوٰۃ ادا کی جائے تو بتایے کل کتنی رقم کے مال پر زکوٰۃ ادا کی گئی ؟

5 - اگر انورعلی نے 1275 روپے بطور زکوٰۃ ادا کیے ہوں اور زکوٰۃ کی شرح $2\frac{1}{2}\%$ ہو تو بتایے انورعلی کے پاس کل کتنی رقم کا مال تھا؟

6 - ایک دکان دار کی سالانہ آمدنی 55,000 روپے ہے۔ اُس کے ذمہ کُل انکم ٹیکس معلوم کیجیے۔

7 - کبیر حسین کی ماہوار تنخواہ 6,000 روپے ہے۔ اِس کے لیے اِنکم ٹیکس کا گوشوارہ تیار کیجیے۔

8 - منور دین کی سالانہ آمدنی 1,30,000 روپے ہے۔ اِس کے لیے اِنکم ٹیکس کا گوشوارہ تیار کیجیے۔

جب کہ بچت کی تفصیل درج ذیل ہے۔

(i) انشورنس = 3000 روپے سالانہ

(ii) ڈیفنس سیونگ سرٹیفکیٹ = 10,000 روپے

9۔ اگر ایک شخص کی ماہوار تنخواہ 10,000 روپے ہو تو اس کے لیے انکم ٹیکس کا گوشوارہ تیار کیجیے۔

جب کہ بچت

(i) انشورنس = 4000 روپے سالانہ

(ii) ڈیفنس سیونگ سرٹیفکیٹ = 20,000 روپے

10۔ ایک شخص کے مکان کی مالیت برائے پراپرٹی ٹیکس 2,50800 روپے تشخیص کی گئی ہے اگر پراپرٹی ٹیکس کی شرح 1.5 فیصد سالانہ ہو تو بتایے اسے کتنا پراپرٹی ٹیکس ادا کرنا پڑتا ہے؟

11۔ قدیر خان کے پاس 5 دُکانیں ہیں۔ جن کی مالیت برائے پراپرٹی ٹیکس 4,00,000 روپے ہے۔ اگر شرح ٹیکس 2 فی صد ہو تو اُسے کتنا پراپرٹی ٹیکس دینا ہوگا؟

12۔ ایک شخص کے پاس 2 رہائشی مکان اور تین دُکانیں ہیں۔ ہر ایک رہائشی مکان کی مالیت 300000 روپے اور ہر دُکان کی مالیت 1,00,000 روپے ہے رہائشی مکان پر 0.5 فی صد اور دُکان پر 2 فی صد پراپرٹی ٹیکس اَدا کرنا ہے۔ بتایے اُسے کل کتنا پراپرٹی ٹیکس دینا پڑے گا؟

13۔ اگر نوید انجم کو 2 فی صد کی شرح سے 6800 روپے سالانہ پراپرٹی ٹیکس ادا کرنا پڑتا ہو تو اس کے مکان کی کل مالیت معلوم کیجیے؟

14۔ عمر کو چار دُکانوں پر 2.5 فی صد سالانہ شرح سے 12500 روپے پراپرٹی ٹیکس ادا کرنا پڑتا ہو تو ہر دُکان کی مالیت معلوم کیجیے؟

5.5 نفع نقصان (PROFIT ,LOSS)

جب کسی قسم کی خرید و فروخت یا کاروبار کیا جاتا ہے تو اس میں نفع و نقصان کا ہونا لازمی ہے۔ اگر ایک چیز قیمت خرید سے زیادہ فروخت ہو جائے تو نفع ہوگا۔ اگر قیمت خرید سے کم پر فروخت ہو تو نقصان ہوگا۔ مثلاً ایک چیز 25 روپے میں خرید کر 30 روپے میں فروخت کی جائے تو اس طرح 5 روپے نفع ہوگا اور اگر 25 روپے میں خرید کر 20 روپے میں فروخت کی جائے تو 5 روپے نقصان ہوگا۔ نفع یا نقصان ہمیشہ قیمت

خرید یا لاگت پر ہوتا ہے۔ وضاحت میں مندرجہ ذیل مثالیں دیکھیے۔

مثال 1 :

شریف نے ایک پرانی کار 35,000 روپے میں خرید کر 33000 روپے میں فروخت کر دی بتایئے اُسے کتنے فی صد نقصان ہوا۔

حل :

کار کی قیمت خرید = 35,000 روپے

کار کی قیمت فروخت = 33000 روپے

نقصان = 35000 - 33000

= 2000 روپے

فرض کیا نقصان x فی صد ہے

تناسب یوں ہوگا۔ $x : 2000 :: 100 : 35000$

$$35000 \times x = 100 \times 2000$$

$$x = \frac{100 \times 2000}{35000} = \frac{40}{7}$$

$$x = 5\frac{5}{7}\ \%$$

مثال 2 :

ایک کتب فروش 200 کتابیں 800 روپے میں خرید کر ان میں سے 160 کتابیں 5 روپے فی کتاب اور 40 کتابیں 4.50 روپے فی کتاب کے حساب سے فروخت کرتا ہے بتایئے اُسے کتنے فی صد نفع یا نقصان ہوا؟

حل :

200 کتابوں کی قیمت خرید = 800 روپے

160 کتابوں کی قیمت فروخت بحساب 5 روپے فی کتاب

$= 160 \times 5$

$= 800$ (روپے)

40 کتابوں کی قیمت فروخت بحساب 4.50 روپے فی کتاب

$= 40 \times 4.50$

$= 180$ (روپے)

200 کتابوں کی قیمت فروخت

$= 800 + 180$

$= 980$ (روپے)

نفع

$= 980 - 800$

$= 180$ (روپے)

نفع فی صد

$= \frac{180 \times 100}{800}$

$= \frac{45}{2}$

$= 22 \frac{1}{2} \%$

5.6 قیمت فروخت معلوم کرنا

مثال 1 :
اگر ایک میز 650 روپے میں خرید کر 22 فی صد نفع پر فروخت کردی جاے تو اس کی قیمت فروخت معلوم کیجیے۔

حل :

فرض کیا قیمت خرید = 100 روپے

نفع = 22 %

قیمت فروخت = 122 روپے

اگر قیمت خرید 100 روپے ہو تو قیمت فروخت = 122 روپے

اگر قیمت خرید 1 روپیہ ہو تو قیمت فروخت = $\frac{122}{100}$

اگر قیمت خرید 650 روپے ہو تو قیمت فروخت $= 650 \times \frac{122}{100}$
$= 793$ روپے

مثال 2 :

قدیر نے ایک سکوٹر 12000 روپے میں خرید کر ایک سال بعد 12 % نقصان پر فروخت کر دیا۔ بتایئے اُس نے سکوٹر کتنے میں فروخت کیا؟

حل :

فرض کیا قیمت خرید = 100 روپے
نقصان = 12 %
قیمت فروخت = 88 روپے
اگر قیمت خرید 100 روپے ہو تو قیمت فروخت = 88 روپے
اگر قیمت خرید 1 روپے ہو تو قیمت فروخت $= \frac{88}{100}$
اگر قیمت خرید 12000 روپے ہو تو قیمت فروخت $= 12000 \times \frac{88}{100}$
$= 10560$ روپے

5.7 قیمت خرید معلوم کرنا

مثال 1 :

ایک شخص ایک مکان 2,75,000 روپے میں فروخت کر کے 25 فی صد نفع حاصل کرتا ہے مکان کی قیمت خرید بتایئے؟

حل :

فرض کیا مکان کی قیمت خرید = 100 روپے
نفع = 25 %
قیمت فروخت = 125 روپے
اگر قیمت فروخت 125 روپے ہو تو قیمت خرید = 100 روپے
اگر قیمت فروخت 1 روپیہ ہو تو قیمت خرید $= \frac{100}{125}$

اگر قیمت فروخت 2,75,000 ہو تو قیمت خرید $= 275000 \times \frac{100}{125}$
$= 2,20,000$ روپے

مثال 2 :
اگر 100 انڈے بحساب 55 پیسے فی انڈا فروخت کیے جائیں تو $8\frac{1}{3}$ فیصد نقصان ہوتا ہے۔ انڈوں کی قیمت خرید بتایئے

حل :
100 انڈوں کی قیمت فروخت $= 100 \times \frac{55}{100}$
$= 55$ روپے
فرض کیا قیمت خرید $= 100$ روپے
نقصان $= 8\frac{1}{3}$ فی صد
قیمت فروخت $= \frac{275}{3}$ روپے
اگر قیمت فروخت $\frac{275}{3}$ روپے ہو تو قیمت خرید $= 100$ روپے
اگر قیمت فروخت 1 روپیہ ہو تو قیمت خرید $= \frac{3 \times 100}{275}$
اگر قیمت فروخت 55 روپے ہو تو قیمت خرید $= 55 \times \frac{3 \times 100}{275}$
$= 60$ روپے

مشق 5.2

1۔ اگر ایک سوٹ کی قیمت خرید 500 روپے اور قیمت فروخت 600 روپے ہو تو نفع فی صد بتایئے اگر اُسی سوٹ کی قیمت فروخت 450 روپے ہو تو نفع یا نقصان فی صد کیا ہوگا ؟

2۔ ایک آدمی پُرانی کار 32,000 روپے میں خرید کر 28,000 روپے میں فروخت کردیتا ہے۔ نقصان فی صد بتایئے ؟

3۔ ایک مکان کی قیمت خرید 3,30,000 روپے ہے اگر مالک اُسے 3,63,000

روپے میں فروخت کردے تو بتایے اُسے کتنے فی صد نفع ہوگا؟

4۔ ایک دکاندار 100 جوڑے جوتے بحساب 105 روپے فی جوڑا خرید کرتا ہے ان میں سے 80 جوڑے 110 روپے فی جوڑا اور 20 جوڑے 115 روپے فی جوڑا کے حساب سے فروخت کر دیتا ہے۔ اُسے کتنے فی صد نفع ہوا؟

5- مندرجہ ذیل کی قیمت فروخت معلوم کیجیے جبکہ

(i) قیمت خرید 500 روپے ، نفع 7 %

(ii) قیمت خرید 57800 روپے ، نقصان $8\frac{3}{4}$ %

(iii) قیمت خرید 3480 روپے ، نفع 3.5 %

(iv) قیمت خرید 30450 روپے ، نقصان 3.6 %

6- مندرجہ ذیل کی قیمت خرید معلوم کیجیے جبکہ

(i) قیمت فروخت 8830.25 روپے ، نفع 4.5 %

(ii) قیمت فروخت 64357 روپے ، نفع $15\frac{3}{4}$ %

(iii) قیمت فروخت 41041 روپے ، نقصان 2.75 %

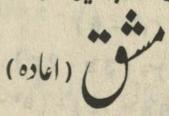
(iv) قیمت فروخت 52742.50 روپے ، نقصان $8\frac{3}{4}$ %

باب 6

الجبری جملے کلیات واجزائے ضربی

ALGEBRAIC EXPRESSIONS, FORMULAE AND FACTORIZATION

6.1 الجبری جملوں کی جمع وتفریق (ADDITION AND SUBTRACTION OF ALGEBRAIC EXPRESSIONS)

ہم ساتویں جماعت میں الجبری جملوں پر چار بنیادی عوامل جمع ، تفریق ، ضرب اور تقسیم کا استعمال پڑھ چکے ہیں۔ اعادہ کے لیے مندرجہ ذیل مشق حل کیجیے۔

جمع کیجیے۔

1. $2x^2 - 2x + 3,\ 2x^2 + 5x + 4,\ x^2 - 2x - 6$
2. $a^3 - a^2 b + 5ab^2 + b^3,\ -a^3 - 10ab^2 + b^3,\ 2a^2 b + 5ab^2 - b^3$
3. $4m^3 + 2m^2 - 5m + 7,\ 3m^3 + 6m^2 - 2,\ -5m^2 + 3m,\ 2m - 6$
4. $1 + 2y - 3y^2 - 5y^3,\ -1 + 2y^2 - y,\ 5y^3 + 3y^2 + 4$
5. $4h^3 - 7 + 3h^4 - 2h,\ 7h - 3h^3 + 2 - h^4,\ 2h^4 + 2h^3 - 5$

پہلے جملے میں سے دوسرے جملے کو تفریق کیجیے۔

6. $2x^2 y + 3xy^2 - xyz,\ x^2 y - 2xy^2 + 3xyz$
7. $x^3 - 3x^2 + x,\ -x^3 + 3x^2 - x$
8. $4a^3 x^2 - 3ax^4 + a^5,\ 3a^3 x^2 + 7a^2 x^3 - a^5$
9. $7x^3 - 5y^2 + 7x - 5,\ 3x^3 + 2y^2 - 5x + 2$
10. $2x^4 - 4y^5 + 3z^2 + 6,\ 2x^4 - 2y^5 + z^2 + 1$
11. $3a^3 - 3a^2 + 4a - 5,\ a^2 + 1$

12 $a+b+c$ میں سے $3a+5b-4c$ ، $2a-b+3c$ اور $4a-3b+2c$ کے مجموعے کو تفریق کیجیے۔

حل کیجیے۔

13. $(x^2-3x-2)(2x-1)$

14. $(5b^2-3b-2)(-2b-3)$

15. $(x^2+x-2)(x^2-x+2)$

16. $(2k^2-3k-1)(3k^2-k-1)$

17. $(5x^4-x^3+4x^2-2x+3)(x^2-2x+3)$

18. $(a^4+1+6a^2-4a^3-4a)(a^3-1+3a-3a^2)$

حل کیجیے۔

19. $(x^2+5x-6)\div(x-1)$

20. $(m^2+7m-78)\div(m-6)$

21. $(12a^2+ax-6x^2)\div(3a-2x)$

22. $(a^4-2a^3-7a^2+8a+12)\div(a^2-a-6)$

23. $(20-27m+21m^3-26m^2)\div(3m+7m^2-4)$

24. $(5a^3+1+10a^4-4a^2)\div(5a^3-2a+1)$

25. $(12x^4+5x^3-33x^2-6x+20)\div(4x^2-x-5)$

6.2 خطوط وحدانی (بریکٹ BRACKET)

پچھلی جماعتوں میں ہم پڑھ چکے ہیں کہ الجبری جملوں میں مختلف رقموں کی گروہ بندی کے لیے خطوط وحدانی استعمال کیے جاتے ہیں۔ بعض اوقات ایک ہی الجبری جملے میں مختلف قسم کے خطوط وحدانی استعمال کیے جاتے ہیں۔ مندرجہ ذیل قسم کے خطوط وحدانی مستعمل ہیں۔

(i) قطعہ خط "______"

(ii) چھوٹے خطوط وحدانی " ( ) " یا چھوٹی بریکٹ

(iii) درمیانے خطوط وحدانی " { } " یا درمیانی بریکٹ

(iv) بڑے خطوط وحدانی " [ ] " یا بڑی بریکٹ

6.3 الجبری جملوں میں خطوطِ وحدانی کا استعمال
(USE OF BRACKET IN ALGEBRAIC EXPRESSIONS)

الجبرا میں خطوط وحدانی ختم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل اصُولوں کو مدِ نظر رکھا جاتا ہے۔

(i) اگر خطوط وحدانی کے باہر '+' کی علامت ہو تو خطوط وحدانی کو موقوف کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً

$$a + (b + c) = a + b + c$$

اِسی طرح

$$a + (c - d) = a + c - d$$

(ii) اگر خطوط وحدانی کے باہر نفی کی علامت ہو تو خطوط وحدانی ختم کرنے کے لیے اس کے اندر موجود تمام رقموں کی علامتیں تبدیل کردی جاتی ہیں۔

مثلاً

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

اگر دو خطوط وحدانی کے درمیان '+'، '-'، یا '÷' میں سے کوئی بھی علامت نہ ہو تو اُس سے مراد خطوط وحدانی کے اندر جملوں کی آپس میں ضرب ہوگی۔

مثلاً

$(a + b)\ (c + d)$ سے مُراد '$a + b$' اور '$c + d$' کی ضرب ہے۔

(iii) کِسی الجبری جملے میں مختلف قِسم کے خطوط وحدانی حسبِ ذیل ترتیب میں ختم کیے جاتے ہیں۔

(i) قطعہ خط
(ii) چھوٹی بریکٹ
(iii) درمیانی بریکٹ
(iv) بڑی بریکٹ

مثال 1 :

$a - [\,2b - \{\,3c - (\,5d - \overline{e + f}\,)\,\}\,]$ حل کیجیے۔

حل :

$$a - [\,2b - \{\,3c - (\,5d - \overline{e + f}\,)\,\}\,]$$

$= a - [2b - \{3c - (5d - e - f)\}]$

$= a - [2b - \{3c - 5d + e + f\}]$

$= a - [2b - 3c + 5d - e - f]$

$= a - 2b + 3c - 5d + e + f$

مثال 2 :

حل کیجیے۔

$[3a - \{2a - (a - b)\}] - [4a - \{3a - (2a - \overline{b - a})\}]$

حل :

$[3a - \{2a - (a - b)\}] - [4a - \{3a - (2a - \overline{b - a})\}]$

$= [3a - \{2a - a + b\}] - [4a - \{3a - (2a - b + a\}]$

$= [3a - 2a + a - b] - [4a - \{3a - 2a + b - a\}]$

$= [3a - 2a + a - b] - [4a - 3a + 2a - b + a]$

$= 3a - 2a + a - b - 4a + 3a - 2a + b - a$

$= 3a - 2a + a - 4a + 3a - 2a - a - b + b$

$= -2a$

مختصر کیجیے۔

1. $(p - q) - (q - 2p) + (2p - q)$
2. $(a + 3b) - (b - 3a) - \{a + 2b - (2a - b)\}$
3. $x - [y + \{x - (y - x)\}]$
4. $3a^2 - [6a^2 - \{8b^2 - (9a^2 - 3b^2)\}]$
5. $4x - 3\{x - (1 - y) + 2(1 - x)\}$
6. $a + \{-2b + 3(c - \overline{d - e})\}$

7- $-3p - \{5q - (3p + 2q) - (2p - \overline{q + p})\}$

8- $3(5 - 6x) - 5[x - 5\{1 - 3(x - \overline{3 + 2})\}]$

9- $12 - [6a - (7 - \overline{a - 5}) - \{5a + (3 - \overline{2 - a})\}]$

10- $84 - 7[-11x - 4\{-17x + 3(8 - \overline{9 - 5x})\}]$

6.4 الجبری جملوں کی قیمتیں (EVALUATION OF ALGEBRAIC EXPRESSIONS)

اگر کسی الجبری جملے میں متغیرات کی جگہ حقیقی اعداد کے سیٹ کے ارکان رکھیں تو ایک حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ یہ عدد اُس جملے کی قیمت کہلاتا ہے مثلاً

$5x + 1$ کی قیمت، جبکہ $x = 2$ ہو، '11' ہوگی۔

مثال 1:

$a = 2$ تو $a^3 + 2a^2 - 5$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$a^3 + 2a^2 - 5$$

$= (2)^3 + 2(2)^2 - 5$ (a کی قیمت درج کرنے سے)

$= 8 + 8 - 5$

$= 11$

مثال 2:

اگر $a = 3$، $b = -2$، $c = 5$ ہو تو $3a^2 - 2b^3 + 3c^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$3a^2 - 2b^3 + 3c^2$$

(a، b، c کی قیمتیں درج کرنے سے)

$= +3(3)^2 - 2(-2)^3 + 3(5)^2$

$= 27 + 16 + 75$

$= 118$

مشق 6.2

اگر $a = 4$ ، $b = 2$ ، $c = 3$ ، $f = -1$ ، $h = -2$ اور $g = 6$ تو مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

1۔ $3a - 9b + c$

2۔ $3f^2 + 5h - 2c^3 - 4b$

3۔ $7c^2 + 5b - 4a + 5h^2$

4۔ $f^2 - 3a^2 + 2c^2$

5۔ $3b^2 - 2b^3 + 4h^2 - 3h^4$

6۔ $\frac{a^2 - b^2}{c + h}$

7۔ $\frac{(a+b)^2}{(c+f)^2} - \frac{(h-f)^2}{g}$

8۔ $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{f^2}{h^2}$

9۔ $(b-h)^2 - (g-c)^2 + 3f^3$

10۔ $(g-h)^2 - (b-c)^3 + (a-b)$

6.5 کلیات : (FORMULAE)

الجبرا میں بہت سے ایسے کلیات (فارمولے) ہیں جن کی مدد سے اکثر سوالات میں ضرب اور تقسیم کا پُورا عمل کیے بغیر نتائج لکھے جا سکتے ہیں۔
یہ کلیات اپنی افادیت کی وجہ سے الجبرا میں بنیادی اہمیت کے حامل ہیں یہاں ہم صرف چند آسان اور نہایت ضروری کلیات کا مطالعہ کریں گے۔

کلیہ (i)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

اِس کلیہ کو ہم دو طرح سے ثابت کر سکتے ہیں۔

پہلا طریقہ

$$(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b)$$
$$= a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

یا

$$\begin{array}{r} (a+b) \\ \times\ (a+b) \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

پس

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

دوسرا طریقہ:

فرض کیجیے لمبائی کی اکائی اس طرح اختیار کی گئی ہے کہ

$$m\overline{AB} = a$$

$$m\overline{BC} = b$$

اس طرح $m\overline{AB} + m\overline{BC} = a + b$

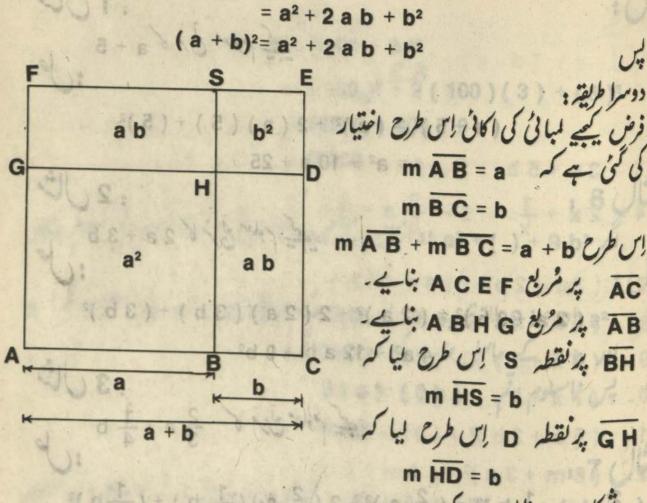
$\overline{AC}$ پر مُربع ACEF بنایے۔

$\overline{AB}$ پر مُربع ABHG بنایے۔

$\overline{BH}$ پر نقطہ S اِس طرح لیا کہ

$$m\overline{HS} = b$$

$\overline{GH}$ پر نقطہ D اِس طرح لیا کہ

$$m\overline{HD} = b$$

شکل سے ظاہر ہے کہ

علاقہ ACEF کا رقبہ = علاقہ ABHG کا رقبہ + علاقہ GHSF کا رقبہ + علاقہ HBCD کا رقبہ + علاقہ HDES کا رقبہ

$$(a+b)^2 = a \times a + ab + ab + b \times b$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

پس $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

الفاظ میں اِس کلیہ کو ہم یوں بیان کر سکتے ہیں۔

> دو ارکان کے مجموعہ کا مُربّع برابر ہے پہلے رُکن کا مُربّع جمع دونوں ارکان کے حاصل ضرب کا دُو گُنا جمع دُوسرے رُکن کا مُربّع
>
> $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال 1 :

$a + 5$ کا مربّع معلوم کیجیے۔

حل :

$$(a + 5)^2 = (a)^2 + 2(a)(5) + (5)^2$$
$$= a^2 + 10a + 25$$

مثال 2 :

$2a + 3b$ کا مربّع معلوم کیجیے۔

حل :

$$(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$$
$$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

مثال 3 :

$\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b$ کا مربّع معلوم کیجیے۔

حل :

$$\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b\right)^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{1}{4}b\right) + \left(\frac{1}{4}b\right)^2$$
$$= \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{16}b^2$$

مثال 4 :

$(3a + 2b)^2 - (2a + b)^2$ کو مختصر کیجیے۔

حل :

$$(3a + 2b)^2 - (2a + b)^2$$
$$= \{(3a)^2 + 2(3a)(2b) + (2b)^2\} - \{(2a)^2 + 2(2a)(b) + (b)^2\}$$
$$= \{9a^2 + 12ab + 4b^2\} - \{4a^2 + 4ab + b^2\}$$
$$= 9a^2 + 12ab + 4b^2 - 4a^2 - 4ab - b^2$$
$$= 5a^2 + 8ab + 3b^2$$

مثال 5 :

$(103)^2$ کی قیمت کلیہ کی مدد سے معلوم کیجیے۔

حل:

$$(103)^2 = (100 + 3)^2$$
$$= (100)^2 + 2(100)(3) + (3)^2$$
$$= 10000 + 600 + 9$$
$$= 10609$$

مثال 6:

اگر $a^2 + (\ \ ) + 9b^2$ دو ارکان کے مجموعہ کا مربع ہو تو نامعلوم رقم معلوم کیجیے۔

حل: a^2 اور $9b^2$ بالترتیب a اور $3b$ کے مربع ہیں، اِس لیے نامعلوم رقم a اور $3b$ کے حاصل ضرب کی دو چند ہوگی۔

پس نامعلوم رقم $2(a)(3b)$

$$= 6ab$$

مثال 7:

اگر $4x^2 + 24xy + (\ \ )$ دو ارکان کے مجموعہ کا مربع ہو تو نامعلوم رقم معلوم کیجیے۔

حل: سوال سے ظاہر ہے کہ نامعلوم دوسرے رکن کا مربع ہے۔ $4x^2$، $2x$ کا مربع ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ

$2(2x)\times($دوسرا رکن$) = 24xy$

یا دوسرا رکن $= \dfrac{24xy}{2 \times 2x}$

$= 6y$

لہٰذا نامعلوم رقم = دوسرے رکن کا مربع

$= (6y)^2$

$= 36y^2$

مشق 6.3

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا مُربّع معلوم کیجیے۔

1 - $3a + 5b$ 2 - $6b + 7$ 3 - $3x + 8y$

4 - $2x + \frac{1}{x}$ 5 - $\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b$ 6 - $\frac{5}{6}a + \frac{2}{3}b$

مختصر کیجیے۔

7 - $(3a + 2b)^2 + (4a + 3b)^2$

8 - $(5a + b)^2 + (2a + 3b)^2$

9 - $(3x + 5y)^2 - (2x + y)^2$

10 - $(7x + 2y)^2 - (3x + y)^2$

11 - $(5a + 3b)^2 + (3a + 2b)^2$

12 - $(8m + 3n)^2 - (4m + 5n)^2$

13 - کلیہ کی مدد سے حل کیجیے۔

(i) $(105)^2$ (ii) $(92)^2$ (iii) $(502)^2$ (iv) $(403)(403)$

(v) $(705) \times (705)$ (vi) $(1002)^2$ (vii) $(206)^2$ (viii) 83×83

14 - مندرجہ ذیل میں ہر ایک جملہ دو ارکان کے مجموعہ کا مُربّع ہے۔ نامعلوم رُکن معلوم کیجیے۔

(i) $a^2 + (\ ) + 9b^2$ (ii) $4a^2 + (\ ) + b^2$

(iii) $25a^2 + (\ ) + 4b^2$ (iv) $x^2 + (\ ) + \frac{1}{x^2}$

(v) $49a^2 + 28ab + (\ )$ (vi) $36x^2 + 36x + (\ )$

(vii) $\frac{1}{16}a^2 + a + (\ )$ (viii) $\frac{9}{16}a^2 + \frac{21}{2}a + (\ )$

(ix) $(\ ) + 126y + 81y^2$ (x) $(\ ) + 40ab + 25b^2$

کلیہ (ii)

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

پہلا طریقہ:

$$(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b)$$
$$= a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

پس $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

یا

$$\begin{array}{r} (a-b) \\ \times\,(a-b) \\ \hline a^2 - ab \\ -ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

دوسرا طریقہ:

فرض کیجیے لمبائی کی اکائی اس طرح اختیار کی گئی ہے کہ

$$m\,\overline{AC} = a$$
$$m\,\overline{BC} = b$$

اس طرح $m\,\overline{AB} = m\,\overline{AC} - m\,\overline{BC}$

$$= a - b$$

$\overline{AC}$ پر مُربّع ACEF بنایے۔

$\overline{AB}$ پر مُربّع ABHG بنایے۔

$\overrightarrow{BH}$ پر نقطہ S اِس طرح لیا کہ

$$m\,\overline{HS} = b$$

$\overrightarrow{GH}$ پر نقطہ D اِس طرح لیا کہ $m\,\overline{HD} = b$

شکل سے ظاہر ہے کہ

علاقہ ABHG کا رقبہ = علاقہ ACEF کا رقبہ _ علاقہ BCES کا رقبہ _ علاقہ GDEF کا رقبہ + علاقہ HDES کا رقبہ

$$(a-b)^2 = a \times a - ab - ab + b \times b$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

پس $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

الفاظ میں اِس کلیہ کو ہم یوں بیان کر سکتے ہیں۔

دو ارکان کے فرق کا مُربّع برابر ہے پہلے رُکن کا مُربّع نفی دونوں ارکان کے حاصل ضرب کا دو گنا جمع دوسرے رُکن کا مُربّع۔

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال 1:

$a - 4$ کا مُربّع معلوم کیجیے۔

حل:

$$(a - 4)^2 = (a)^2 - 2(a)(4) + (4)^2$$
$$= a^2 - 8a + 16$$

مثال 2:

$3a - 4b$ کا مُربّع معلوم کیجیے۔

حل:

$$(3a - 4b)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(4b) + (4b)^2$$
$$= 9a^2 - 24ab + 16b^2$$

مثال 3:

$\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b$ کا مُربّع معلوم کیجیے۔

حل:

$$\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{3}{4}b\right) + \left(\frac{3}{4}b\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}ab + \frac{9}{16}b^2$$

مثال 4:

$(3x - 2y)^2 - (2x - 5y)^2$ کو مختصر کیجیے۔

حل:

$$(3x - 2y)^2 - (2x - 5y)^2$$
$$= \{(3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2\} - \{(2x)^2 - 2(2x)(5y)$$
$$+ (5y)^2\}$$

$= \{ 9x^2 - 12xy + 4y^2 \} - \{ 4x^2 - 20xy + 25y^2 \}$

$= 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 4x^2 + 20xy - 25y^2$

$= 5x^2 + 8xy - 21y^2$

مثال 5 :

$(5a - 3b)^2 - (2a + b)^2$ کو مختصر کیجیے۔

حل :

$(5a - 3b)^2 - (2a + b)^2$

$= \{ (5a)^2 - 2(5a)(3b) + (3b)^2 \}$

$- \{ (2a)^2 + 2(2a)(b) + (b)^2 \}$

$= \{ 25a^2 - 30ab + 9b^2 \} - \{ 4a^2 + 4ab + b^2 \}$

$= 25a^2 - 30ab + 9b^2 - 4a^2 - 4ab - b^2$

$= 21a^2 - 34ab + 8b^2$

مثال 6 :

$(98)^2$ کی قیمت کلیہ کی مدد سے معلوم کیجیے۔

حل :

$(98)^2 = (100 - 2)^2$

$= (100)^2 - 2(100)(2) + (2)^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

مثال 7 :

اگر $4a^2 - 20ab + (\quad)$ دو ارکان کے فرق کا مربع ہو تو نامعلوم رقم معلوم کیجیے۔

حل :

سوال سے ظاہر ہے کہ نامعلوم رقم دوسرے رکن کا مربع ہے جبکہ $4a^2$، $2a$ کا مربع ہے اِس لیے پہلا رکن $2a$ ہے۔

$2(2a) \times ($ دوسرا رکن $) = 20ab$

دوسرا رُکن $= \dfrac{20\,a\,b}{2 \times 2\,a}$

$= 5\,b$

پس نامعلوم رقم 5 b کا مُربّع ہے۔

اس لیے

نامعلوم رقم $= (5\,b)^2$

$= 25\,b^2$

مشق 6.4

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا مُربّع معلوم کیجیے۔

1- $7a - b$ 2- $5a - 2b$ 3- $3x - 7y$

4- $3x - \dfrac{1}{3x}$ 5- $3a - 11b$ 6- $\dfrac{5}{6}a - \dfrac{3}{4}b$

مختصر کیجیے۔

7- $(3a - 4b)^2 + (2a - 3b)^2$ 8- $(5a - 4b)^2 + (7a - 2b)^2$

9- $(11x - 9y)^2 + (7x - 3y)^2$ 10- $(6a - 5b)^2 - (3a - 2b)^2$

11- $(10x - 2y)^2 - (5x + 3y)^2$ 12- $(7x + 6y)^2 - (2x - 3y)^2$

13- $(12a - 11b)^2 - (4a - 5b)^2$ 14- $(9x - 5y)^2 - (2x + 5y)^2$

کلیہ (ii) کی مدد سے مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی قیمت معلوم کیجیے۔

15- $(48)^2$ 16- $(97)^2$ 17- $(998)^2$

18- $(1996)^2$ 19- $(393)^2$ 20- $(595)^2$

21- مندرجہ ذیل میں ہر جملہ دو ارکان کے فرق کا مربّع ہے۔ نامعلوم رقم معلوم کیجیے۔

(i) $a^2 - (\quad) + 16b^2$ (ii) $9a^2 - (\quad) + 25b^2$

(iii) $\dfrac{25}{36}a^2 - (\quad) + 36c^2$ (iv) $\dfrac{1}{49}a^2 - (\quad) + 49b^2$

(v) $4a^2 - 20ab + (\quad)$ (vi) $\dfrac{16}{25}x^2 - \dfrac{24}{5}xy + (\quad)$

(vii) $(\quad) - 2ab + \dfrac{9}{4}b^2$ (viii) $(\quad) - \dfrac{1}{2}ab + \dfrac{1}{4}b^2$

(ix) $(\quad) - 14ab + \dfrac{49}{81}b^2$ (x) $169a^2 - 26ab + (\quad)$

6.6 کلیات (i) اور (ii) کے نتائج صریح

نتیجہ صریح 1 : $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

ثبوت : دائیں طرف $= (a+b)^2 - 2ab$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$

$= a^2 + b^2$

= بائیں طرف

پس $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

نتیجہ صریح 2 : $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

ثبوت : دائیں طرف $= (a-b)^2 + 2ab$

$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$

$= a^2 + b^2$

= بائیں طرف

پس $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

نتیجہ صریح 3 : $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

ثبوت : بائیں طرف $= (a+b)^2 + (a-b)^2$

$= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$= 2a^2 + 2b^2$

$= 2(a^2 + b^2)$

= دائیں طرف

پس $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

نتیجہ صریح 4 : $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

ثبوت : بائیں طرف $= (a+b)^2 - (a-b)^2$

$= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$

$= 4ab$

= دائیں طرف

پس $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

نتیجہ صریح 5 : $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

ثبوت

دائیں طرف $= (a - b)^2 + 4ab$

$= a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$= (a + b)^2$

= بائیں طرف

پس $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

نتیجہ صریح 6: $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

ثبوت:

دائیں طرف $= (a + b)^2 - 4ab$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$

$= a^2 - 2ab + b^2$

$= (a - b)^2$

= بائیں طرف

پس $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

مثال 1 :

اگر $a + b = 6$ اور $ab = 5$ تو $a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$a + b = 6$

$ab = 5$

$a^2 + b^2 = ?$

(نتیجہ صریح 1) $$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

قیمتیں درج کرنے سے $$= (6)^2 - 2(5)$$

$$= 36 - 10$$

$$= 26$$

مثال 2 :

اگر $a - b = 2$ اور $ab = 8$ تو $a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$$a - b = 2$$

$$ab = 8$$

$$a^2 + b^2 = ?$$

(نتیجہ صریح 2) $$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

قیمتیں درج کرنے سے $$= (2)^2 + 2(8)$$

$$= 4 + 16$$

$$= 20$$

مثال 3 :

اگر $a + b = 5$ اور $a - b = 2$ تو $a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$$a + b = 5$$

$$a - b = 2$$

$$a^2 + b^2 = ?$$

(نتیجہ صریح 3) $$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$

قیمتیں درج کرنے سے $$= (5)^2 + (2)^2$$

$$= 25 + 4$$

$$= 29$$

$$a^2 + b^2 = \frac{29}{2} = 14\frac{1}{2}$$

مثال 4:

اگر $a + b = 7$ اور $a\,b = 12$ تو $(a - b)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$a + b = 7$$

$$a\,b = 12$$

$$(a - b)^2 = ?$$

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4\,a\,b$$ (نتیجہ صریح 6)

قیمتیں درج کرنے سے $= (7)^2 - 4\,(12)$

$$= 49 - 48$$

$$= 1$$

مثال 5:

اگر $a - b = 2$ اور $a\,b = 10$ تو $(a + b)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$a - b = 2$$

$$a\,b = 10$$

$$(a + b)^2 = ?$$

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4\,a\,b$$ (نتیجہ صریح 5)

قیمتیں درج کرنے سے $= (2)^2 + 4\,(10)$

$$= 4 + 40$$

$$= 44$$

مثال 6:

اگر $a + b = 40$ اور $a\,b = 20$ تو $(a - b)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$a + b = 40$$

$$a\,b = 20$$

$(a - b)^2 = ?$

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ (نتیجہ صریح 6)

$= (40)^2 - 4(20)$ قیمتیں درج کرنے سے

$= 1600 - 80$

$= 1520$

مثال 7 :

اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ تو $x^2 + \frac{1}{x^2}$ اور $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل :

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

$$(x + \frac{1}{x})^2 = (4)^2$$ (طرفین کا مربع اُٹھانے سے)

$$(x)^2 + 2(x)(\frac{1}{x}) + (\frac{1}{x})^2 = 16$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 16$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$$

اب پھر دونوں طرف کا مربع لینے سے

$$(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = (14)^2$$

$$(x^2)^2 + 2(x^2)(\frac{1}{x^2}) + (\frac{1}{x^2})^2 = 196$$

$$x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 196$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 194$$

مشق 6.5

1۔ $a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a + b = 4, \quad ab = 3$

(ii) $a + b = 10, \quad a b = 20$

(iii) $a + b = 5, \quad a b = -4$

(iv) $a - b = 3, \quad a b = 12$

(v) $a - b = 7, \quad a b = 8$

(vi) $a + b = 9, \quad a - b = 5$

2- $(a + b)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a - b = 5, \quad a b = 15$

(ii) $a - b = 16, \quad a b = -50$

(iii) $a - b = -4, \quad a b = 14$

3- $(a - b)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a + b = 8, \quad a b = 15$

(ii) $(a + b) = -3, \quad a b = -12$

(iii) $a + b = 11, \quad a b = 25$

(iv) $a + b = 13, \quad a b = 20$

4- $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $x + \frac{1}{x} = 6$ (ii) $x + \frac{1}{x} = 10$

(iii) $x - \frac{1}{x} = 14$ (iv) $x - \frac{1}{x} = 9$

(v) $x + \frac{1}{x} = 17$ (vi) $x - \frac{1}{x} = 13$

5- $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $x + \frac{1}{x} = 4$ (ii) $x - \frac{1}{x} = 2$

(iii) $x - \frac{1}{x} = 6$ (iv) $x + \frac{1}{x} = 3$

6- (i) اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$ تو $x + \frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 83$ تو $x - \frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(iii) اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 167$ تو $x + \frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

6.7 کلیہ (iii) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

اِس کلیہ کو بھی ہم دو طرح سے ثابت کریں گے۔

پہلا طریقہ:

$$
\begin{array}{r}
(a+b) \\
\times (a-b) \\
\hline
a^2 + ab \\
- ab - b^2 \\
\hline
a^2 \qquad - b^2
\end{array}
$$

پس $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

دوسرا طریقہ:

D, a - b, T, b, C
b^2
E, F
a, $a(a-b)$, $b(a-b)$, $a-b$
A, a - b, H, b, B
a

فرض کیجیے لمبائی کی اکائی اس طرح اختیار کی گئی ہے کہ

$m\overline{AB} = a$

$m\overline{HB} = b$

اِس طرح

$m\overline{AH} = m\overline{AB} - m\overline{HB}$

$= a - b$

$\overline{AB}$ پر مربع ABCD بنایئے۔ $\overline{HT}$ متوازی $\overline{BC}$ کھینچیے۔ جو $\overline{DC}$ کو نقطہ T پر ملتا ہے $\overline{TC}$ پر مربع TEFC بنایئے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ

(بائیں سے دائیں پڑھیے)

(علاقہ ABCD کا رقبہ) - (علاقہ TEFC کا رقبہ) = (علاقہ AHTD کا رقبہ)
+ (علاقہ HBFE کا رقبہ)

$$a^2 - b^2 = a(a-b) + b(a-b)$$
$$= (a-b)(a+b)$$
$$= (a+b)(a-b)$$

پس

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

مثال 1:

$(a+5)(a-5)$ کو مختصر کیجیے۔

حل:

$$(a+5)(a-5)$$
$$= (a)^2 - (5)^2$$
$$= a^2 - 25$$

مثال 2:

$3a+7b$ اور $3a-7b$ کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل:

$$(3a+7b)(3a-7b)$$
$$= (3a)^2 - (7b)^2$$
$$= 9a^2 - 49b^2$$

مثال 3 :

$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$ کو حل کیجیے۔

حل :

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$$
$$=\{(a+b)(a-b)\}(a^2+b^2)$$
$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$
$$=(a^2)^2-(b^2)^2$$
$$=a^4-b^4$$

مثال 4 :

اگر $a+b=9$ اور $a^2-b^2=45$ تو $a-b$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$$a+b=9$$
$$a^2-b^2=45$$
$$a-b=?$$
$$a^2-b^2=45$$
$$(a+b)(a-b)=45$$
$$9(a-b)=45$$ ($a+b$ کی قیمت درج کرنے سے)
پس $$a-b=5$$

مثال 5 :

کلیہ کی مدد سے 103×97 کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$$103 \times 97$$
$$=(100+3)(100-3)$$
$$=(100)^2-(3)^2$$

$= 10000 - 9$

$= 9991$

مشق 6.6

1۔ کلیہ کی مدد سے حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(a + 2b)(a - 2b)$

(ii) $(3x + 2y)(3x - 2y)$

(iii) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

(iv) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

(v) $(\sqrt{7}a + \sqrt{3}b)(\sqrt{7}a - \sqrt{3}b)$

(vi) $(3x^2 + 2y^3)(3x^2 - 2y^3)$

2۔ مسلسل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2)$

(ii) $(3x + 2Y)(3x - 2y)(9x^2 + 4y^2)$

(iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + b)(a^2 + b^2)$

(iv) $(2a + b)(2a - b)(4a^2 + b^2)(16a^4 + b^4)$

3۔ قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $a - b$ کی جبکہ $a^2 - b^2 = 40$, $a + b = 8$

(ii) $a + b$ کی جبکہ $a^2 - b^2 = 72$, $a - b = 6$

(iii) $a^2 + b^2$ کی جبکہ $a^2 - b^2 = 24$, $a + b = 12$

(iv) ab کی جبکہ $a^2 - b^2 = 16$, $a + b = 8$

(v) ab کی جبکہ $a^2 - b^2 = 32$ $a - b = 5$

4۔ کلیہ کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) 102×98

(ii) 64×56

(iii) 145×135 (iv) $1.02 \times .98$

6.8 کلیہ (iv)

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

پہلا طریقہ:

$$(ax+b)(cx+d)$$
$$= ax(cx+d) + b(cx+d)$$
$$= acx^2 + adx + bcx + bd$$
$$= acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

یا

$$\begin{array}{r} (cx+d) \\ \times (ax+b) \\ \hline acx^2 + adx \qquad\qquad \\ +bcx + bd \\ \hline acx^2 + adx + bcx + bd \end{array}$$
$$= acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

دوسرا طریقہ:

فرض کیجیے لمبائی کی اکائی اِس طرح اختیار کی گئی ہے کہ

$m\overline{AB} = ax + b$

$m\overline{BC} = cx + d$

ABCD مستطیل بنایے۔

$\overline{AB}$ میں $m\overline{AE} = ax$

اِسی طرح $m\overline{EB} = b$

$\overline{BC}$ میں $m\overline{CF} = cx$ اور $m\overline{FB} = d$

شکل سے ظاہر ہے کہ

مستطیلی علاقے ABCD کا رقبہ

= مستطیلی علاقے KGHD کا رقبہ + مستطیلی علاقے AEGK کا رقبہ +

مستطیلی علاقے GFCH کا رقبہ + مستطیلی علاقے EBFG کا رقبہ

$$(ax+b)(cx+d) = (ax)(cx) + (ax)d + (cx)b + bd$$

$$= acx^2 + adx + bcx + bd$$

$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

پس

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

اگر $a = c = 1$ تو

$$(x + b)(x + d) = x^2 + (b + d)x + bd$$

مثال 1:

$(x + 3)(x + 5)$ کو حل کیجیے۔

حل:

$$(x + 3)(x + 5) = x^2 + (3 + 5)x + 3 \times 5$$

$$= x^2 + 8x + 15$$

مثال 2:

$(2x + 3)(4x + 5)$ کو حل کیجیے۔

حل:

$$(2x + 3)(4x + 5) = 2 \times 4x^2 + (2 \times 5 + 3 \times 4)x + 3 \times 5$$

$$= 8x^2 + (10 + 12)x + 15$$

$$= 8x^2 + 22x + 15$$

مثال 3:

$(3x + 4)(5x - 7)$ کو حل کیجیے۔

حل:

$$(3x + 4)(5x - 7) = 3 \times 5x^2 + \{(3)(-7) + (4)(5)\}x + (4)(-7)$$

$$= 15x^2 + \{-21 + 20\}x - 28$$

$$= 15x^2 - x - 28$$

مشق 6.7

1- کلیہ کی مدد سے حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(x+3)(x+11)$
(ii) $(x+15)(x+3)$
(iii) $(x+8)(x-5)$
(iv) $(x-3)(x+13)$
(v) $(2x+3)(4x+8)$
(vi) $(7x+2)(8x-11)$
(vii) $(bn+m)(nx+p)$
(viii) $(6x-1)(5x+7)$
(ix) $(13x-2)(13x-4)$
(x) $(3x-5)(3x-6)$

2- مختصر کیجیے۔

(i) $(x+5)(x+3)+(x+2)(x+4)$
(ii) $(x+11)(x+7)+(x+10)(x-3)$
(iii) $(x-13)(x-2)-(x+4)(x-3)$
(iv) $(x-11)(x+6)-(x-9)(x+5)$
(v) $(x+8)(x-3)-(x+5)(x-4)$
(vi) $(a-11)(a+8)+(a+11)(a-5)$
(vii) $(a-9)(a-11)-(a+5)(a-20)$
(viii) $(2x+3)(3x+2)-(x+4)(2x-5)$
(ix) $(5x-1)(6x+7)+(7x-2)(2x+5)$
(x) $(9x+5)(2x-1)-(11x-2)(x+3)$
(xi) $(13x-1)(8x+5)+(2x-21)(x-3)$
(xii) $(5x-3)(8x-7)-(3x-2)(5x-1)$

اجزائے ضربی

(FACTORIZATION)

ہم اعداد کے اجزائے ضربی اور عمل تجزّی سے پہلے ہی واقف ہیں اور جانتے ہیں کہ اگر کوئی عدد کسی دیے ہوئے عدد کو پورا پورا تقسیم کرے وہ عدد دیے ہوئے عدد کا عاد یا جزو ضربی کہلاتا ہے۔ اسی طرح اگر کوئی دیا ہوا جبری جملہ دو یا دو سے زیادہ جبری جملوں کا حاصلِ ضرب ہو تو وہ جبری جملے، دیے ہوئے جبری جملے کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔

مثلاً

$$a(b+c) = ab+ac$$

میں a اور 'b + c' جملہ 'ab + ac' کے اجزائے ضربی ہیں۔

اور $a(b+c)$ اِس جملہ کی تجزّی ہے۔

الجبرے میں جبری جملوں کی تجزّی ایک نہایت مفید عمل ہے یہ جبری جملوں کے عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل معلوم کرنے، کسور کے اختصار، کسور کی جمع، تفریق، تقسیم اور دیگر بہت سے مواقع پر استعمال ہوتا ہے۔

6.9 جملے کی رقوم میں مشترک جزو معلوم کرکے تجزّی کرنا

مثال 1 :

$(x+2y)$ اور 2 کو ضرب دیجیے۔

حل :

$$2(x+2y) = 2x+4y$$

اب ہم حاصل ضرب $2x+4y$ پر غور کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اس جملہ کے دو ارکان $2x$ اور $4y$ ہیں۔ ان میں سے ہر ایک صرف 2 پر پورا پورا تقسیم ہوتا ہے۔ اِس لیے ہم کہتے ہیں کہ $2x$ اور $4y$ میں 2 مشترک جزو ہے اِس لیے اِسے یوں لکھ سکتے ہیں کہ

$$2x + 4y$$
$$= 2(x + 2y)$$

اِسی طرح سے

$$2ab + 6ac$$
$$= 2a(b + 3c)$$

یعنی مشترک نکالنے کا طریقہ یہ ہوا کہ دیئے ہوئے جملہ کے ارکان میں مشترک عدد یا جملہ تلاش کیجیے اور اُس پر ہر ایک رکن کو تقسیم کیجیے۔ مشترک جملہ کو خارج قسمت سے ضرب دیجیے۔ یہ مطلوبہ تجزّی ہوگی۔

مثال 2 :

$6ab + 9bc$ کی تجزّی کیجیے۔

حل :

$$6ab + 9bc$$

یہاں $3b$ دونوں رقموں کا جزو ضربی ہے۔

دیا ہوا جملہ

$$= 6ab + 9bc$$
$$= 3b(2a + 3c)$$

مثال 3 :

$2ax^2 + 2ax + 4a$ کی تجزّی کیجیے۔

حل :

$2ax^2 + 2ax + 4a$ میں $2a$ ہر رقم کا جزو ضربی ہے۔

$$2ax^2 + 2ax + 4a$$
$$= 2a(x^2 + x + 2)$$

مثال 4 :

$a^2bc + ab^2c + abc^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$$a^2bc + ab^2c + abc^2$$
$$= abc(a+b+c)$$

مشق 6.8

مندرجہ ذیل جملوں کی تجزی کیجیے۔

1. $2a^2 - 4$
2. $a^2 + ax$
3. $a^3 - 2a^2$
4. $x^3 + bx^2$
5. $3x^2 - 6ax$
6. $p^2 + 2p^2q$
7. $y^2 + xy$
8. $x^2y^2z^2 + 3xyz$
9. $2a^3 - a^2 + a$
10. $3a^3 + 6a^2x - 3a^2$
11. $7x^2 - 7x + 14$
12. $4b^5 + 6a^2b^3 - 2b^2$
13. $x^3y^3 - x^2y^2 + 2xy$
14. $26x^3y - 39x^2y + 13xy$
15. $a^2b^2c^2 + abc + ab$
16. $3a^2y^3 + 9a^4y - 6ay$

6.10 جملہ میں رقوم کی گروہ بندی یا ازسرِنو ترتیب دے کر تجزی کرنا

بعض اوقات دیے ہوئے جملہ کے تمام ارکان میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہوتا ، البتہ جملہ میں مختلف رقوم کی گروہ بندی کرنے سے یا رقوم کی ترتیب بدلنے سے جو گروہ بنتے ہیں ان میں مشترک جزو ضربی مل جاتے ہیں۔ اس کی وضاحت مثالوں کی مدد سے کی جاتی ہے۔

مثال 1 :

$ab + bc + ad + cd$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

جملہ کی سب رقوم میں کوئی جزو مشترک نہیں ہم دیکھتے ہیں کہ پہلی دو رقوم میں b مشترک ہے اور تیسری و چوتھی رقوم میں d مشترک ہے۔ اس لیے گروہ بندی اس

طرح کریں گے:۔

$$ab + bc + ad + cd$$
$$= (ab + bc) + (ad + cd)$$
$$= b(a + c) + d(a + c)$$ (ضرب کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ جمع)
$$= (a + c)(b + d)$$ (ضرب کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ جمع)

مثال 2 :

$ab + 2cd + 2bc + ad$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$$ab + 2cd + 2bc + ad$$
$$= ab + 2bc + ad + 2cd$$ (جمع کی خاصیتِ مبادلہ)
$$= (ab + 2bc) + (ad + 2cd)$$
$$= b(a + 2c) + d(a + 2c)$$ (ضرب کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ جمع)
$$= (a + 2c)(b + d)$$ (ضرب کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ جمع)

مثال 3 :

$5x^3 - 25x^2 + 15x - 75$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$$5x^3 - 25x^2 + 15x - 75$$
$$= 5\{x^3 - 5x^2 + 3x - 15\}$$
$$= 5\{x^2(x - 5) + 3(x - 5)\}$$
$$= 5(x - 5)(x^2 + 3)$$

مشق 6.9

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی تجزی کیجیے۔

1۔ $ab + ac + bd + cd$ 2۔ $ac - bd + bc - ad$

3 $x^2 - ax + bx - ab$ 4. $a^2 + ac + 4a + 4c$

5. $3a - 3b + ab - a^2$ 6. $ab - by - ay + y^2$

7. $pq + qr - pr - r^2$ 8. $ac^2 - 2a - bc^2 + 2b$

9. $2x^3 + 3 + 2x + 3x^2$ 10. $a^2x - aby + 2ax - 2by$

11. $axy + bcxy - az - bcz$ 12. $12a^2 + bx^2 - 4ab - 3ax^2$

6.11 $a^2 + 2ab + b^2$ اور $a^2 - 2ab + b^2$ کی شکل کے جملوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

دیے ہوئے جملوں کی تجزی ان کلیات کی مدد سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:

$4a^2 + 12ab + 9b^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$4a^2 + 12ab + 9b^2$$
$$= (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$$
$$= (2a + 3b)^2 \quad \text{(مطلوبہ تجزی)}$$

مثال 2:

$9 + 30a + 25a^2$ کی تجزی کیجیے

حل:

$$9 + 30a + 25a^2$$
$$= (3)^2 + 2(3)(5a) + (5a)^2$$
$$= (3 + 5a)^2 \quad \text{(مطلوبہ تجزی)}$$

مثال 3:

$9b^2 - 24bc + 16c^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$$9b^2 - 24bc + 16c^2$$
$$= (3b)^2 - 2(3b)(4c) + (4c)^2$$
$$= (3b - 4c)^2$$ (مطلوبہ تجزی)

مثال 4 :

$98c^2 - 140cd + 50d^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$$98c^2 - 140cd + 50d^2$$
$$= 2\{49c^2 - 70cd + 25d^2\}$$
$$= 2\{(7c)^2 - 2(7c)(5d) + (5d)^2\}$$
$$= 2(7c - 5d)^2$$ (مطلوبہ تجزی)

مشق 6.10

مندرجہ ذیل میں ہر جملے کی تجزی کیجیے۔

1- $a^2 + 6a + 9$

2- $b^2 + 8b + 16$

3- $9a^2 + 24ab + 16b^2$

4- $a^2 - 8a + 16$

5- $a^2 - 18a + 81$

6- $25a^2 - 30ad + 9d^2$

7- $25x^2 + 80x + 64$

8- $1 + 8abc + 16a^2b^2c^2$

9- $16a^2b^2 - 24abc + 9c^2$

10- $\frac{4}{9}a^2 - ab + \frac{9}{16}b^2$

11- $\frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{15}ab + \frac{16}{25}b^2$

12- $\frac{9}{16}c^2 + 2cd + \frac{16}{9}d^2$

13- $\frac{9}{25}a^2 - \frac{6}{5}ab + b^2$

14- $4a^2 - 28ac + 49c^2$

15- $25x^2 - 30xy + 9y^2$

16- $49x^2 + 84xy + 36y^2$

17- $18x^2 - 84xy + 98y^2$

18- $20x^2 - 60xy + 45y^2$

19- $36x^2 + 120xy + 100y^2$ 20- $243x^2 - 54x + 3$

6.12 $a^2 - b^2$ کی شکل کے جملوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

اس لیے $a^2 - b^2$ کی تجزی $(a + b)(a - b)$ ہے

لہٰذا دو مربعوں کے فرق کی تجزی اس کلیہ کی مدد سے کی جائے گی۔ اس کی وضاحت مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:

$a^2 - 16$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$a^2 - 16$$
$$= (a)^2 - (4)^2$$
$$= (a + 4)(a - 4)$$

مثال 2:

$169c^2 - 25$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$169c^2 - 25$$
$$= (13c)^2 - (5)^2$$
$$= (13c + 5)(13c - 5)$$

مثال 3:

$16a^2 - 36c^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$16a^2 - 36c^2$$
$$= 4\{4a^2 - 9c^2\}$$
$$= 4\{(2a)^2 - (3c)^2\}$$

$= 4(2a + 3c)(2a - 3c)$ (مطلوبہ تجزی)

مثال 4 :

$(a + b)^2 - 9c^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$(a + b)^2 - 9c^2$

$= (a + b)^2 - (3c)^2$

$= \{(a + b) + (3c)\}\{(a + b) - (3c)\}$

$(a + b + 3c)(a + b - 3c)$ (مطلوبہ تجزی)

مثال 5 :

$(a + b)^2 - (c - d)^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$(a + b)^2 - (c - d)^2$

$= \{(a + b) + (c - d)\}\{(a + b) - (c - d)\}$

$(a + b + c - d)(a + b - c + d)$ (مطلوبہ تجزی)

مثال 6 :

$16(a - b)^2 - 9(b + c)^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$16(a - b)^2 - 9(b + c)^2$

$= 4^2(a - b)^2 - 3^2(b + c)^2$

$= \{4(a - b)\}^2 - \{3(b + c)\}^2$

$= (4a - 4b)^2 - (3b + 3c)^2$

$= \{(4a - 4b) + (3b + 3c)\}\{(4a - 4b) - (3b + 3c)\}$

$= (4a - 4b + 3b + 3c)(4a - 4b - 3b - 3c)$

$= (4a - b + 3c)(4a - 7b - 3c)$ (مطلوبہ تجزی)

مشق 6.11

تجزی کیجیے۔

1. $x^2 - 25$
2. $64 - x^2$
3. $9y^2 - 49x^2$
4. $4a^2 - 81$
5. $x^2 - 64y^2$
6. $81x^2 - 121y^2$
7. $a^2b^2 - 16c^2d^2$
8. $(2a + b)^2 - 9c^2$
9. $25 - (3a - 2b)^2$
10. $64a^2 - (7b + d)^2$
11. $(3a - 5b)^2 - (2a - b)^2$
12. $25(a + b)^2 - 16(a - b)^2$
13. $49(2a - 3b)^2 - 16(a + b)^2$
14. $81(c + d)^2 - 64(c - d)^2$
15. $225(x - y)^2 - 49(x + y)^2$
16. $(x - y)^2 - (a + b)^2$
17. $(c - d)^2 - 4(x + y)^2$
18. $36(x + y)^2 - 81(c - d)^2$
19. $15(a + b)^2 - 60(c + d)^2$
20. $64(x + y)^2 - 16(a - b)^2$

6.13 $a^2 + 2ab + b^2$، $a^2 - 2ab + b^2$ اور $a^2 - b^2$ کی شکل کے جملوں پر متفرق سوالات

مثال 1:

$a^4 + a^2b^2 + b^4$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$a^4 + a^2 b^2 + b^4$ کو دو ارکان کا مکمل مربع بنانے کے لیے اِس میں $a^2 b^2$ جمع کرتے ہیں۔

$a^2 b^2$ جمع کیا گیا ہے۔ اس لیے $a^2 b^2$ تفریق بھی کیا گیا ہے۔

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$$
$$= (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - (ab)^2$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$
$$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$
$$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{(مطلوبہ تجزی)}$$

مثال 2 :

$a^4 + 4b^4$ کی تجزی کیجیے۔

حل :

$$a^4 + 4b^4$$
$$= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) - 2(a^2)(2b^2)$$
$$= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$$

مربع مکمل کرنے کے لیے $4a^2b^2$ جمع اور تفریق کیا

$$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$$
$$= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$
$$= (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2) \quad \text{(مطلوبہ تجزی)}$$

مثال 3 :

$\dfrac{(30.2)^2 - (16.2)^2}{14}$ کو کلیہ کی مدد سے مختصر کیجیے۔

حل :

$$\frac{(30.2)^2 - (16.2)^2}{14}$$
$$= \frac{(30.2 + 16.2)(30.2 - 16.2)}{14}$$

$$= \frac{(46.4)\times(14)}{14}$$

$$= 46.4$$

مثال 4 :

$(80)^2 - (70)^2$ کی قیمت کلیہ کی مدد سے معلوم کیجیے۔

حل :

$$(80)^2 - (70)^2$$
$$= (80 + 70)(80 - 70)$$
$$= (150)(10)$$
$$= 1500$$

مشق 6.12

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی تجزی کیجیے۔

1 - $a^4 + a^2 + 1$

2 - $a^4 + 4$

3 - $4x^4 + 81$

4 - $81a^4 + 64b^4$

5 - $a^8 + a^4 + 1$

6 - $4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$

7 - $9a^4 + 14a^2b^2 + 25b^4$

8 - $x^4 + 6x^2y^2 + 25y^4$

9 - $a^4 + 64$

10 - $x^4 - x^2y^2 + 16y^4$

11 - $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$

12 - $c^2 + d^2 + 2cd - 4a^2 - b^2 + 4ab$

13 - $9x^2 + 6xy - c^2 - d^2 + 2cd + y^2$

14 - $x^2 + y^2 - 4a^2 - d^2 - 2xy - 4ad$

15 - $\ell^2 + 16m^2 - 4x^2 - y^2 + 4xy - 8\ell m$

کلیہ کی مدد سے مختصر کیجیے۔

16 - $(89)^2 - (88)^2$

17 - $\frac{(152)^2 - (150)^2}{302}$

18 - $\frac{0.543 \times 0.543 - 0.457 \times 0.457}{0.543 + 0.457}$

19 - $\frac{(30.5)^2 - (26.5)^2}{4}$

20 - $\frac{47.5 \times 47.5 - 37.5 \times 37.5}{47.5 - 37.5}$

6.14 $ax^2 + bx + c$ کی شکل کے جملے جبکہ $a \neq 1, a \neq 0$

مندرجہ ذیل مثال پر غور کرتے ہیں۔

$(2x + 3)(5x + 7) = 2x(5x + 7) + 3(5x + 7)$ (i)

$= 10x^2 + 14x + 15x + 21$ (ii)

$= 10x^2 + 29x + 21$ (iii)

اُوپر کے حاصلِ ضرب کے اقدام سے ظاہر ہے کہ :

$10 \times 21 = 14 \times 15 = 210$

یعنی اگر ہمیں $10x^2 + 29x + 21$ کی تجزی کرنا ہو تو ہم $10 \times 21 = 210$ کے عادوں کا سیٹ معلوم کریں گے اور ان میں سے دو ایسے ارکان کا انتخاب کریں گے جن کا مجموعہ 29 ہو۔ مثلاً

210 کے عادوں کا سیٹ

$= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وہ صرف 14 ، 15 ہی ہیں۔

یعنی

$10x^2 + 29x + 21$

$= 10x^2 + 15x + 14x + 21$

$= 5x(2x + 3) + 7(2x + 3)$

$= (2x + 3)(5x + 7)$

مثال 1:

$3x^2 + 13x + 12$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$3x^2 + 13x + 12$

3×12 کے عادوں کا سیٹ

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$3x^2 + 13x + 12$

$= 3x^2 + 9x + 4x + 12$

$= 3x(x+3) + 4(x+3)$

مطلوبہ تجزی: $= (x+3)(3x+4)$

مثال 2:

$12x^2 + 5x - 2$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$= 12x^2 + 5x - 2$

24 کے عادوں کا سیٹ

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24,\}$

$12x^2 + 5x - 2$

$= 12x^2 + 8x - 3x - 2$

$= 4x(3x+2) - 1(3x+2)$

$= (3x+2)(4x-1)$

مثال 3:

$12x^2 - 17x + 6$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$12x^2 - 17x + 6$

72 کے عادوں کا سیٹ

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$

$$12x^2 - 17x + 6$$
$$= 12x^2 - 9x - 8x + 6$$
$$= 3x(4x - 3) - 2(4x - 3)$$
$$= (4x - 3)(3x - 2)$$

مثال 4:
$6a^2 - 7a - 3$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$6a^2 - 7a - 3$$
$$= 6a^2 - 9a + 2a - 3$$
$$= 3a(2a - 3) + 1(2a - 3)$$
$$= (2a - 3)(3a + 1)$$

مشق 6.13

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی تجزی کیجیے۔

1۔ $2a^2 + 5a + 2$
2۔ $3x^2 + 10x + 3$
3۔ $2x^2 + 9x + 10$
4۔ $3a^2 + 5a - 2$
5۔ $2a^2 + 5a - 3$
6۔ $3x^2 + x - 2$
7۔ $3x^2 - 7x - 6$
8۔ $2x^2 + 9x - 5$
9۔ $4x^2 + 5x - 6$
10۔ $4x^2 - 4x - 3$
11۔ $6y^2 - 7y - 3$
12۔ $4x^2 - 8xy - 5y^2$
13۔ $6x^2 - 7xy + 2y^2$
14۔ $6a^2 - 13ab + 2b^2$
15۔ $4a^2 - 8ab - 5b^2$
16۔ $6x^2 - 5xy - 6y^2$
17۔ $12x^2 - 17xy + 6y^2$
18۔ $6x^2 + 35xy - 6y^2$
19۔ $8a^2 + 4a - 24$
20۔ $18x^2 + 33x - 30$

باب 7

یک درجی مساواتیں

(LINEAR EQUATIONS)

پچھلی جماعتوں میں ہم ایک متغیّر میں یک درجی مساواتوں سے متعلق پڑھ آئے ہیں مثلاً

$$2x - 3 = x + 6$$

متغیّر x میں یک درجی مساوات ہے اور

$$3y - 7 = y + 3$$

متغیّر y میں یک درجی مساوات ہے

ہم جانتے ہیں کہ مساوات کا حل سیٹ معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی مساوات کو مترادف مساوات میں تبدیل کیا جاتا ہے اور یہ عمل اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک کہ متغیّر کی قیمت معلوم نہ ہو جائے۔

اب ہم قدرے مشکل یک درجی مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کرنے کا طریقہ سیکھیں گے۔

مثال 1: مساوات $2x - 4 = 6$ کو حل کیجیے۔

حل:

$$2x - 4 = 6$$

$(2x - 4) + 4 = 6 + 4$ (طرفین میں 4 جمع کیا)

$[2x + (-4)] + 4 = 10$ (تفریق کی تعریف کی رُو سے)

$2x + [(-4) + 4] = 10$ (جمع کی خاصیت تلازم)

$2x + 0 = 10$ (جمعی معکوس کی خاصیت)

$2x = 10$ (جمعی ذاتی عنصر کی خاصیت)

$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$ یا (طرفین کو 2 پر تقسیم کیا)

$x = 5$ یا (تقسیم کے عمل سے)

پس مطلوبہ حل سیٹ = $\{5\}$

پڑتال:

دی ہوئی مساوات میں x کی جگہ 5 رکھنے سے

$2 \times 5 - 4 = 6$

یا $10 - 4 = 6$

یا $6 = 6$

پس جواب درست ہے۔

نوٹ: مندرجہ بالا حل کو رسمی حل کہا جاسکتا ہے۔ اِس مثال کا غیر رسمی مختصر حل یوں ہوگا۔

$2x - 4 = 6$

$2x - 4 + 4 = 6 + 4$ (طرفین میں 4 جمع کیا)

$2x = 10$

$x = 5$ (طرفین کو 2 پر تقسیم کیا)

آمدہ مثالوں میں ہم غیر رسمی حل پر ہی اکتفا کریں گے۔

مثال 2:

حل کیجیے۔ $\frac{x-2}{4} - \frac{3-x}{6} = 3\frac{1}{6}$

حل:

$\frac{x-2}{4} - \frac{3-x}{6} = 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$

$3(x-2) - 2(3-x) = 38$

(کسریں دور کرنے کے لیے طرفین کو 4 اور 6 کے ذواضعاف اقل 12 سے ضرب دی)

یا $3x - 6 - 6 + 2x = 38$ (خطوط وحدانی کھولنے سے)

یا $3x + 2x - 12 = 38$

$5x = 38 + 12$ (طرفین میں 12 جمع کیا)

یا $5x = 50$

(طرفین کو 5 پر تقسیم کیا) $x = 10$

پس حل سیٹ = $\{10\}$

مثال 3 : مساوات

$(x-1)^2 - (x-2)^2 = 5$ کو حل کیجیے۔

حل :

$(x-1)^2 - (x-2)^2 = 5$

(مربعے کھولنے سے)

یا $(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) = 5$

(خطوط وحدانی کھولنے سے)

یا $x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 5$

(ہم جنس رقموں کو اکٹھا کیا)

یا $x^2 - x^2 - 2x + 4x + 1 - 4 = 5$

یا $2x - 3 = 5$

(طرفین میں 3 جمع کیا)

یا $2x = 8$

(طرفین کو 2 پر تقسیم کیا)

یا $x = 4$

پس حل سیٹ = $\{4\}$

مثال 4 : مساوات

$(x-3)(x-2) = (x-4)(x+5)$ کو حل کیجیے۔

حل :

$(x-3)(x-2) = (x-4)(x+5)$

(کلیے کے استعمال سے جملوں کو ضرب دی)

یا $x^2 - 5x + 6 = x^2 + x - 20$

(طرفین سے $x^2 + x$ تفریق کیا)

یا $x^2 - 5x + 6 - x^2 - x = -20$

(ہم جنس رقموں کو اکٹھا کیا)

یا $x^2 - x^2 - 5x - x + 6 = -20$

(طرفین سے 6 تفریق کیا)

یا $-6x = -20 - 6 = -26$

(طرفین کو 1- سے ضرب دی)

یا $6x = 26$

یا $x = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$

حل سیٹ = $\{4\frac{1}{3}\}$

مثال 5 : مساوات $3.5x - 6.5 = 4.7 - 2.1x$ کو حل کیجیے۔

حل : $3.5x - 6.5 = 4.7 - 2.1x$

$3.5x + 2.1x = 4.7 + 6.5$ (طرفین میں 6.5 اور 2.1 x جمع کرنے سے)

یا $(3.5 + 2.1)x = 11.2$

یا $5.6x = 11.2$

یا $x = \frac{11.2}{5.6}$

$= \frac{112}{56} = 2$

پس حل سیٹ = $\{2\}$

مثال 6 :

مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجیے

$$\frac{5x - .4}{.3} + \frac{1.3 - 3x}{2} = \frac{1.8 - 8x}{1.2}$$

حل : $\frac{5x - .4}{.3} + \frac{1.3 - 3x}{2} = \frac{1.8 - 8x}{1.2}$

$$\frac{10(5x - .4)}{3} + \frac{1.3 - 3x}{2} = \frac{10(1.8 - 8x)}{12}$$

(مخرجوں میں کسور اعشاریہ کو صحیح اعداد میں تبدیل کرنے کے لیے متعلقہ رقموں کے شمار کنندہ اور مخرج کو 10 سے ضرب دی)

یا $\frac{50x - 4}{3} + \frac{1.3 - 3x}{2} = \frac{5}{6}(1.8 - 8x)$

$\therefore$ $2(50x - 4) + 3(1.3 - 3x) = 5(1.8 - 8x)$

(طرفین کو 6 سے ضرب دی)

یا $100x - 8 + 3.9 - 9x = 9 - 40x$

یا $100x - 9x + 40x = 9 + 8 - 3.9$

یا $131x = 13.1$

یا $x = \frac{13.1}{131} = \frac{131}{10 \times 131} = \frac{1}{10} = .1$

پس حل سیٹ $= \{.1\}$

مشق 7.1

دی گئی مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کیجیے:-

1- $2x - 1 - 2(3x - 2) + 3(4x - 3) = 5x - 4$

2- $13(4x - 1) + 11(x - 8) - 15(2x - 1) = 13$

3- $x^2 + 3(5x - 18) + 3x^2 = 4x^2 - 3x$

4- $2x(x - 3) + x(x - 4) - x(3x - 2) + 80 = 0$

5- $(x - 5)(x - 7) - 9 = (x - 6)(x + 6)$

6- $(x - 4)^2 - (x - 5)^2 = 13$

7- $(x - 2)(2x - 1) = 2(x + 1)(x + 3)$

8- $(8 - 3x)(5 - x) = (3x - 4)(x - 6) - 13$

9- $(3x - 4)^2 + (2x - 5)^2 = 13(x - 6)^2$

10- $\frac{3 - 2x}{4} + \frac{4x - 5}{6} = 1$

11- $\frac{x + 6}{4} - \frac{16 - 3x}{12} = 4\frac{1}{6}$

12- $\frac{12 - 3x}{4} - 1 = \frac{3x - 11}{3}$

13- $\frac{x + 2}{4} = 1 - \frac{x - 2}{5}$

14- $\frac{3x + 4}{5} - \frac{7x - 3}{2} + \frac{16 - x}{4} = 0$

15. $\frac{x+1}{3} - \frac{x+8}{5} + \frac{3x+1}{7} = 0$

16. $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = \frac{3x+5}{15} + 2$

17. $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} = 16$

18. $\frac{4-x}{4} - \frac{5-x}{5} + \frac{6-x}{6} = 1$

19. $\frac{7x}{2} - 1 = \frac{3x+1}{2} + \frac{4x+51}{14}$

20. $.4x - .3x = .34x + 1.44$

21. $1.32x + .02x = 1.17 - x$

22. $11.1x - 3(2x - 5) = 7(1.8x - 3) - 3.9$

23. $1.2x - \frac{.18x - .05}{.5} = .4x + 8.9$

24. $.07x - .53 = \frac{.18x - .95}{4} + .1x$

25. $x - \frac{2x - .3}{.7} = \frac{5 - x}{.35}$

7.1 مساواتوں سے متعلق عبارتی سوالات

مساواتوں کے ذریعے عبارتی سوالات حل کرنے کے طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1: اجمل نے اپنے دو بچوں شاہد اور راشد کو 18 روپے عیدی کے اِس طرح دیے کہ شاہد کو راشد سے 3 روپے زیادہ ملے۔ بتایے ہر ایک کو کتنی عیدی ملی۔

حل: فرض کیجیے۔

راشد کو جتنی عیدی ملی = x روپے

شاہد کو جتنی عیدی ملی

$= x + 3$ (روپے)

پس بموجب شرط سوال:

$$x + (x + 3) = 18$$

یا $2x + 3 = 18$

یا $2x = 18 - 3$

یا $2x = 15$

یا $x = \frac{15}{2}$

$= 7.50$

پس راشد کا حصہ $= 7.50$ (روپے)

اور شاہد کا حصہ $= 7.50 + 3.00$

10.50 (روپے)

پڑتال:

$$7.50 + 10.50 = 18$$

اور

$$10.50 - 7.50 = 3$$

مثال 2:

اگر ایک عدد کو 7 پر تقسیم کیا جائے اور حاصل قسمت میں 3 جمع کیا جائے تو 24 حاصل ہوتا ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

حل:

فرض کیجیے۔

مطلوبہ عدد $= x$

x کو 7 پر تقسیم کرنے اور حاصل قسمت میں 3 جمع کرنے سے

$\frac{x}{7} + 3$ حاصل ہوگا

پس بموجب شرط سوال:

$$\frac{x}{7} + 3 = 24$$

یا $\frac{x}{7} = 24 - 3$

یا $\frac{x}{7} = 21$

یا $x = 21 \times 7$

یا $x = 147$

پس مطلوبہ عدد = 147

مثال 3 :

ایک مستطیلی قطعۂ اراضی کا احاطہ 100 میٹر ہے۔ اس کی چوڑائی، لمبائی سے 10 میٹر کم ہے۔ لمبائی اور چوڑائی علیٰحدہ علیٰحدہ معلوم کیجیے۔

حل :

فرض کیجیے۔

مستطیلی قطعۂ اراضی کی چوڑائی

$= x$ (میٹر)

مستطیلی قطعۂ اراضی کی لمبائی

$= x + 10$ (میٹر)

مستطیلی قطعۂ اراضی کا احاطہ

$= 2\{ x + (x + 10) \}$

$= 2(2x + 10)$

$= 4x + 20$

پس بموجب شرط سوال

$4x + 20 = 100$

یا $4x = 100 - 20$

یا $4x = 80$

یا $x = \frac{80}{4}$

یا $x = 20$

پس مستطیلی قطعۂ اراضی کی چوڑائی = 20 میٹر

مستطیلی قطعۂ اراضی کی لمبائی

$= x + 10$

$= 20 + 10$

$= 30$ (میٹر)

مثال 4 :

آٹھویں جماعت کے 50 لڑکوں نے دفاعی فنڈ میں ایک ہزار روپے چندہ دیا۔ کچھ لڑکوں نے 18 روپے فی کس کے حساب سے اور باقی لڑکوں نے 23 روپے فی کس کے حساب سے چندہ دیا۔ ہر شرح سے چندہ دینے والے لڑکوں کی تعداد علیحدہ علیحدہ معلوم کیجیے۔

حل :

فرض کیجیے۔

جتنے طلبہ نے 18 روپے فی کس کے حساب سے چندہ دیا

$= x$ (طلبہ)

جتنے طلبہ نے 23 روپے فی کس کے حساب سے چندہ دیا

$= 50 - x$

x طلبہ نے جتنا چندہ دیا

$= 18x$

$50 - x$ طلبہ نے جتنا چندہ دیا

$= 23(50 - x)$

پس بموجب شرط سوال

$$18x + 23(50 - x) = 1000$$

یا

$$18x + 1150 - 23x = 1000$$

یا

$$18x - 23x = 1000 - 1150$$

یا

$$-5x = -150$$

یا

$$5x = 150$$

یا $x = 30$

$50 - x = 50 - 30 = 20$

لہذا 18 روپے فی کس چندہ دینے والے طلبہ کی تعداد

$= 30$

23 روپے فی کس چندہ دینے والے طلبہ کی تعداد

$= 20$

مثال 5 :

باپ کی موجودہ عمر بیٹے کی عمر کا تین گنا ہے۔ 5 سال بعد باپ کی عمر بیٹے کی عمر کا $2\frac{1}{2}$ گنا ہوگی۔ دونوں کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل :

فرض کیا بیٹے کی موجودہ عمر

$= x$ (سال)

اور باپ کی موجودہ عمر

$= 3x$ (سال)

5 سال بعد بیٹے کی عمر

$= x + 5$ (سال)

5 سال بعد باپ کی عمر

$= 3x + 5$ (سال)

پس بموجب شرط سوال :

$$3x + 5 = \frac{5}{2}(x + 5)$$

یا $6x + 10 = 5x + 25$

یا $6x - 5x = 25 - 10$

یا $x = 15$ یا

پس بیٹے کی موجودہ عمر 15 سال

اور باپ کی موجودہ عمر 45 سال ہے۔

مثال 6 :

ایک عدد دو ہندسوں کا ہے۔ اِن کا مجموعہ 13 ہے۔ اگر ہندسوں کی جگہ آپس میں بدل دی جائے تو نیا عدد بقدر 45 زیادہ ہو جاتا ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

حل :

فرض کیجیے عدد میں
اکائی کا ہندسہ

$= x$

دہائی کا ہندسہ

$= 13 - x$

عدد کی قیمت

$= 10\,(13 - x) + x$

$= 130 - 10x + x$

$= 130 - 9x$

ہندسوں کا مقام آپس میں بدلنے سے
اکائی کا ہندسہ

$= 13 - x$

دہائی کا ہندسہ

$= x$

عدد کی نئی قیمت

$= 10x + 13 - x$

$= 9x + 13$

پس بموجب شرط سوال

$9x + 13 = 130 - 9x + 45$

یا

$9x + 9x = 130 + 45 - 13$

یا

$18x = 162$

یا $x = \frac{162}{18}$

یعنی $x = 9$

اور $13 - x = 13 - 9$

$= 4$

پس مطلوبہ عدد $= 49$

مثال 7 :

ایک کسر کا مخرج شمار کنندہ سے بقدر 4 زیادہ ہے۔ اگر مخرج میں 1 جمع کیا جائے تو کسر $\frac{1}{2}$ کے مترادف ہو جاتی ہے۔ کسر معلوم کیجیے۔

حل :

فرض کیجیے۔

شمار کنندہ

$= x$

مخرج

$= x + 4$

پس بموجب شرط سوال

$$\frac{x}{(x + 4) + 1} = \frac{1}{2}$$

یا $\frac{x}{x + 5} = \frac{1}{2}$

(طرفین کو $2(x + 5)$ سے ضرب دی)

$2x = x + 5$

یا $2x - x = 5$

یا $x = 5$

اور $x + 4 = 5 + 4$

$= 9$

پس مطلوبہ کسر $= \frac{5}{9}$

مثال 8

ایک شخص کے پاس کچھ رقم تھی جو اُس نے رفاہِ عامہ کے کاموں میں اس طرح خرچ کی کہ رقم کا $\frac{1}{3}$ حصہ ایک سکول کو، $\frac{1}{5}$ حصہ ایک ہسپتال کو اور $\frac{1}{6}$ حصہ ایک یتیم خانے کو دیا۔ باقی رقم 12150 روپے ایک مسجد کو دے دی۔ بتایئے اُس نے کل کتنی رقم خرچ کی۔

حل:

فرض کیجیے شخص کے پاس کل رقم (روپے)

$$= x$$

جتنی رقم سکول کو دی

$$= \frac{x}{3}$$

جتنی رقم ہسپتال کو دی

$$= \frac{x}{5}$$

جتنی رقم یتیم خانے کو دی

$$= \frac{x}{6}$$

تینوں اداروں کو جتنی رقم دی

$$= \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6}$$

$$= \frac{10x + 6x + 5x}{30}$$

$$= \frac{21x}{30}$$

$$= \frac{7x}{10}$$

باقی رقم

$$= x - \frac{7x}{10}$$

$$= \frac{10x - 7x}{10}$$

$$= \frac{3x}{10}$$

پس بموجب شرط سوال

$$\frac{3x}{10} = 12150$$

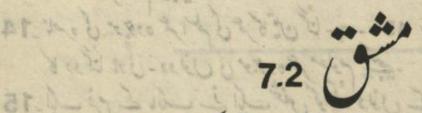
یا

$$x = 12150 \times \frac{10}{3}$$

$$= 4050 \times 10$$

$$= 40500 \quad \text{(روپے)}$$

پس

کل خرچ کی گئی رقم = 40500 روپے

1. دو اعداد کا مجموعہ 110 اور فرق 16 ہے اعداد معلوم کیجیے۔
2. دو متصلہ اعداد کا مجموعہ 127 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔
3. دو متصلہ طاق اعداد کا مجموعہ 164 ہے۔ اعداد بتایئے۔
4. ایک عدد ایسا ہے کہ اُسے 9 پر تقسیم کرنے سے جو حاصل قسمت ملے اُس میں سے 1 تفریق کرنے سے 17 حاصل ہوتا ہے۔ عدد بتایئے۔
5. وہ کونسا عدد ہے جس کے $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{5}$ کا مجموعہ 94 کے برابر ہے۔
6. ایک مستطیلی علاقے کا احاطہ 60 میٹر ہے۔ اِس کی لمبائی چوڑائی سے دو گُنا ہے۔ لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔
7. ایک مستطیلی علاقے کا احاطہ اس کی لمبائی کا تین گُنا ہے۔ جبکہ اس کی چوڑائی 5 میٹر ہے۔ اس کی لمبائی اور احاطہ معلوم کیجیے۔

8۔ ایک عدد ایسا ہے کہ اُس کے دوگنا اور 5 کا مجموعہ وہی ہے جو اُس عدد اور 17 کا مجموعہ ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

9۔ ایک جماعت کے طلبا بس کرایہ پر لینا چاہتے ہیں۔ اگر ہر طالبعلم 5 روپے دے تو بس کے کرایہ سے 12 روپے زیادہ جمع ہو جاتے ہیں اور اگر ہر طالبعلم 4.50 روپے اَدا کرے تو 13 روپے کم رہ جاتے ہیں۔ بس کا کرایہ اور طلبہ کی تعداد معلوم کیجیے۔

10۔ ایک عدد ایسا ہے کہ اگر اُس کے $\frac{2}{3}$ سے 51 تفریق کریں تو باقی عدد اُس کے نصف سے بقدر 84 زیادہ ہو جاتا ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

11۔ تین متصلہ صحیح اعداد کا مجموعہ 1620 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

12۔ چار متصلہ صحیح اعداد کا مجموعہ 210 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

13۔ 18 سال کے بعد عارف کی عمر اس کی موجودہ عمر کا تین گُنا ہو جائے گی۔ اُس کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

14۔ ناصرہ کی موجودہ عمر اسلم کی عمر کا تین گُنا ہے۔ 15 سال بعد ناصرہ کی عمر اسلم کی عمر کا دوگُنا ہوگی۔ دونوں کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

15۔ ایک فرم کے مالک نے ایک شخص کو کچھ دنوں کے لیے اس شرط پر ملازم رکھا کہ اسے 40 روپے روزانہ اُجرت مِلے گی۔ لیکن جس دن وہ غیر حاضر ہوگا اُسے 22.50 روپے جُرمانہ ہوگا۔ مقررہ میعاد کے بعد ملازم کو 505 روپے مِلے۔ اگر ملازم نے کُل 16 روز کام کیا ہو تو بتایے کہ وُہ کِتنے دن غیر حاضر رہا۔

16۔ ایک کسر کا مخرج شمار کنندہ سے بقدر 2 بڑا ہے۔ اگر دونوں میں 5 جمع کیا جائے تو کسر $\frac{20}{21}$ کے مترادف ہو جاتی ہے۔ کسر معلوم کیجیے۔

17۔ ایک کسر کا شمار کنندہ مخرج کے نصف کے برابر ہے۔ اگر شمار کنندہ میں 7 جمع کریں اور مخرج سے 19 تفریق کریں تو حاصل شدہ کسر 2 کے برابر ہوتی ہے۔ کسر معلوم کیجیے۔

18۔ ایک پھل فروش نے کچھ مالٹے 30 روپے فی سینکڑا کے حساب سے خریدے اور 7.50 روپے درجن کے حساب سے فروخت کر دیے۔ اگر اس کا کل نفع 65 روپے

ہو تو بتایئے اُس نے کُل کتنے کے ملاٹے خریدے۔

19۔ عمر اور عون کے پاس کل 57 روپے ہیں۔ عون اور ناصر کے پاس 50 روپے اور عمر اور ناصر کے پاس 53 روپے ہیں۔ بتایئے ہر ایک کے پاس کتنے کتنے روپے ہیں۔

20۔ ایک عدد دو ہندسوں کا ہے جن کا مجموعہ 10 ہے۔ اگر ہندسوں کے مقام آپس میں بدل دیے جائیں تو عدد کی قیمت بقدر 36 کم ہو جاتی ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

21۔ ایک عدد میں دو ہندسے ہیں جن کا مجموعہ 11 ہے۔ اگر ہندسوں کے مقام آپس میں بدل دیے جائیں تو عدد کی قیمت بقدر 27 بڑھ جاتی ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

22۔ احمد نے ایک ماہ میں اپنی تنخواہ کا $\frac{2}{3}$ حصّہ خوراک پر، $\frac{1}{6}$ حصّہ مکان کے کرایہ اور بجلی وغیرہ کے بلوں کی ادائیگی پر، $\frac{1}{8}$ حصّہ بچوں کی تعلیم پر اور 120 روپے باقی اخراجات پر خرچ کیے۔ اگر اُسے 20 روپے اُدھار لینا پڑے ہوں تو اُس کی کُل تنخواہ معلوم کیجیے۔

باب 8

جذرالمربّع

(SQUARE ROOT)

ساتویں جماعت میں ہم مکمل مربّع اعداد کا جذر بذریعہ اجزائے ضربی معلوم کرنے کا طریقہ سیکھ چکے ہیں لیکن اگر مکمل مربّع اعداد بہت ہی بڑے ہوں تو ان کا جذر بذریعہ اجزائے ضربی معلوم کرنے کا عمل طویل اور مشکل ہوتا چلا جاتا ہے۔ یا اگر دیے ہوئے اعداد مکمل مربّع اعداد نہ ہوں تو ایسے اعداد کا جذر معلوم کرنے کے لیے ایک اور طریقہ استعمال کیا جاتا ہے جیسے تقسیم کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں۔ اِس قاعدہ کے مطابق مجذور (وہ عدد جس کا جذر معلوم کیا جانا مطلوب ہو) جن ہندسوں سے بنا ہے اُن کے جوڑے بنائے جاتے ہیں اور پھر جذر معلوم کرنے کا عمل کیا جاتا ہے۔ اِس کی بنیاد الجبرے کے جس کلیے پر رکھی گئی ہے اس کا تذکرہ آگے چل کر کیا جائے گا۔ لیکن پہلے ہم یہ دیکھنا چاہتے ہیں کہ مجذور میں ہندسوں کے جوڑے کیوں اور کیسے بنائے جاتے ہیں۔

8.1 مجذور اور جذر کے ہندسوں کا باہمی تعلق

وجہ	جذر	مجذور	مجذور اور جذر کے ہندسوں کا باہمی تعلق
$1 \times 1 = 1$	1	1	مجذور ایک ہندسی عدد ہے اور جذر بھی ایک ہندسی عدد ہے
$2 \times 2 = 4$	2	4	مجذور ایک ہندسی عدد ہے اور جذر بھی ایک ہندسی عدد ہے
$3 \times 3 = 9$	3	9	مجذور ایک ہندسی عدد ہے اور جذر بھی ایک ہندسی عدد ہے
			جذر میں ہندسوں کی تعداد $= 1 = \frac{1+1}{2} = \frac{\text{مجذور میں ہندسوں کی تعداد} + 1}{2}$

وجہ	جذر	مجذور	مجذور اور جذر کے ہندسوں کا باہمی تعلق
$5 \times 5 = 25$	5	25	مجذور دو ہندسی عدد ہے اور جذر ایک ہندسی عدد ہے
$6 \times 6 = 36$	6	36	مجذور دو ہندسی عدد ہے اور جذر ایک ہندسی عدد ہے۔
$8 \times 8 = 64$	8	64	مجذور دو ہندسی عدد ہے اور جذر ایک ہندسی عدد ہے۔
			جذر میں ہندسوں کی تعداد $= 1 = \frac{2}{2} =$ $\frac{\text{مجذور میں ہندسوں کی تعداد}}{2}$

نتیجہ : اگر مجذور ایک ہندسی یا دو ہندسی عدد ہو تو جذر ایک ہندسی عدد ہوگا۔

وجہ	جذر	مجذور	مجذور اور جذر کے ہندسوں کا باہمی تعلق
$30 \times 30 = 900$	30	900	مجذور تین ہندسی عدد اور جذر دو ہندسی عدد ہے
$40 \times 40 = 1600$	40	1600	مجذور چار ہندسی عدد اور جذر دو ہندسی عدد ہے
$70 \times 70 = 4900$	70	4900	مجذور چار ہندسی عدد اور جذر دو ہندسی عدد ہے
			جذر میں ہندسوں کی تعداد $= 2 = \frac{4}{2} =$ $\frac{\text{مجذور میں ہندسوں کی تعداد}}{2}$

نتیجہ : اگر مجذور تین ہندسی یا چار ہندسی عدد ہو تو جذر دو ہندسی عدد ہوگا۔

وجہ	جذر	مجذور	مجذور اور جذر کے ہندسوں کا باہمی تعلق
$200 \times 200 = 40,000$	200	40,000	مجذور پانچ ہندسی عدد اور جذر تین ہندسی عدد ہے
$500 \times 500 = 25\,0000$	500	25 0000	مجذور چھے ہندسی عدد اور مجذر تین ہندسی عدد ہے
$900 \times 900 = 81\,0000$	900	81 0000	مجذور چھے ہندسی عدد اور جذر تین ہندسی عدد ہے

نتیجہ : اگر مجذور میں ہندسوں کی تعداد پانچ یا چھے ہو تو جذر میں ہندسوں کی تعداد تین ہوگی۔

مندرجہ بالا جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر مجذور میں ہندسوں کی تعداد جفت ہو تو اس تعداد کو 2 پر تقسیم کرنے سے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم ہوجائے گی۔ مثلاً 3600 میں ہندسوں کی تعداد چار ہے اس کے لیے جذر میں ہندسوں کی تعداد $2 = \frac{4}{2}$ ہوگی۔

اگر مجذور میں ہندسوں کی تعداد طاق ہو تو اس تعداد میں 1 جمع کر کے حاصل جمع کو 2 پر تقسیم کرنے سے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم ہو جاتے گی۔ مثلاً

14400 میں ہندسوں کی تعداد 5 ہے تو اس کے جذر میں ہندسوں کی تعداد

$\frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$ ہو گی۔

8.2 مجذور کے ہندسوں کو جوڑوں میں تبدیل کرنا

جذر میں ہندسوں کی تعداد کے مطابق ہی مجذور کے ہندسوں کو جوڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جذر میں ہندسوں کی جتنی تعداد ہو گی مجذور کے ہندسوں کو اتنے ہی جوڑوں میں تقسیم کیا جائے گا مثلاً 4225 چار ہندسی عدد ہے۔ اِس کا جذر دو ہندسی عدد ہو گا۔ لہٰذا اس کا جذر معلوم کرنے کے لیے اس کے ہندسوں کو دو جوڑوں میں تقسیم کرنا ہو گا۔ پہلا جوڑا اکائی کے ہندسے کا اور دوسرا دہائی کے ہندسے کا۔ جو کہ مندرجہ ذیل ہے۔

$\overline{42}\ \overline{25}$

جوڑے بنانے کا عمل اِس طرح کیا جاتا ہے کہ اکائی اور دہائی کے ہندسوں کا ایک جوڑا، سینکڑے اور ہزار کے ہندسوں کا دوسرا جوڑا، دس ہزار اور لاکھ کا تیسرا جوڑا بنائیں گے اور اس طرح جوڑے بنانے کا عمل جاری رکھا جاتا ہے گویا چھے ہندسی عدد کے تین جوڑے بنیں گے۔ لہٰذا تین ہی جوڑے ہوں گے۔

اگر آخر میں ایک ہندسہ اکیلا رہ جائے تو اُسے بھی ایک جوڑا مان لیا جاتا ہے ایسا اِس صورت میں ہو گا جب مجذور میں ہندسوں کی تعداد طاق ہو گی۔

مشق 8.1

1۔ جذر میں ہندسوں کی تعداد کیا ہو گی اگر مکمل مربعّ مجذور میں ہندسوں کی تعداد
(i) طاق ہو۔ (ii) جفت ہو۔

2۔ جذر میں ہندسوں کی تعداد کیا ہو گی اگر مکمل مربعّ مجذور میں ہندسوں کی تعداد

مندرجہ ذیل ہو۔

(i) 7 (ii) 8 (iii) 13 (iv) 11
(v) 10 (vi) 12

3- مجذور کے کتنے جوڑے بنیں گے اگر مجذور
(i) پانچ ہندسی عدد ہو (ii) آٹھ ہندسی عدد ہو
(iii) تین ہندسی عدد ہو (iv) سات ہندسی عدد ہو
(v) دس ہندسی عدد ہو

4- مندرجہ ذیل مکمل مربّع اعداد کو جوڑوں میں تقسیم کیجیے۔
(i) 676 (ii) 5625 (iii) 55696
(iv) 519841 (v) 369664 (vi) 40000
(vii) 64516

8.3 مکمل مربّع قدرتی اعداد کا جذر بذریعہ تقسیم

جیسا کہ اِس باب کے شروع میں کہا گیا ہے "جذر بذریعہ تقسیم" کے قاعدہ کی بنیاد الجبرے کا مندرجہ ذیل اہم کلیہ ہے۔

$(a+b)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

دو ہندسی عدد میں ایک ہندسہ اکائی کا اور دُوسرا دہائی کا ہوگا۔ مثلاً 35 دو ہندسی عدد ہے جس میں اکائی کا ہندسہ 5 اور دہائی کا ہندسہ 3 ہے اور

35

$= 30 + 5$

اب اگر $a = 30, b = 5$ تو

$(a+b)^2$

$= (30+5)^2$

$= (30)^2 + 2 \times 30 \times 5 + (5)^2$

اس کلیہ کا استعمال سمجھنے کے لیے یہاں ہم پہلے صرف ایسے مکمل مربع قدرتی اعداد لیں گے جن کے جذر دو اعداد ہوں گے یعنی ان کے دو جوڑے بنیں گے گویا ان میں سے ایک ہندسہ اکائی کا اور دوسرا دہائی کا ہوگا اور اسی طرح مجذور تین ہندسی یا چار ہندسی اعداد ہوں گے۔

مثال 1 :

1225 کا جذر معلوم کیجیے۔

1225 کے دو جوڑے $\overline{25}$ $\overline{12}$ بنیں گے

دائیں طرف سے دوسرا جوڑا ہمیں جذر میں دہائی کے ہندسے کا اندازہ لگانے میں مدد دے گا۔ ہم نے ایک ایسا عدد معلوم کرنا ہے جس کا مربع " 12 " کے برابر یا اس سے کم ہو مگر اُس سے زیادہ نہ ہو۔

3 ایسا عدد ہے جس کا مربع 9 ہے اور جو "12" کے قریب ترین ہے۔ کیونکہ 4 کا مربع 16 ہوگا جو کہ " 12 " سے زیادہ ہے لہٰذا جذر میں دہائی کا ہندسہ = 3

3 دہائیاں = 30 جو مطلوبہ a کی قیمت ہے۔

یعنی

$$a = 30$$

$$(a)^2 = (30)^2$$

یا

$$a^2 = 900$$

اب

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1225$$

یا

$$a^2 + (2a + b)b = 1225$$

چونکہ $a^2 = 900$ اس لیے اگر 1225 میں سے 900 تفریق کیا جائے تو باقی $(2a + b)b$ ہوگا

یعنی

$$(2a + b)b = 1225 - 900 = 325$$

یا

$$(2 \times 30 + b)b = 325$$

یا

$$(60 + b)b = 325$$

اب "b" اِس طرح معلوم کرنا ہے کہ اگر اُسے "60" میں جمع کر کے حاصل جمع کو اُسی "b" کی قیمت سے ضرب دی جائے تو 325 حاصل ہو۔
325 کو "b" پر تقسیم کر کے "b" کی قیمت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔
کیونکہ $b = 5$

اس لیے $(60 + 5) \times 5$

$= 65 \times 5$

$= 325$

پس اکائی کا ہندسہ "5" ہوا اور اس طرح "1225" کا جذر 35 ہوا۔

مختصر عمل

$30 + 5 = 35$

30	$\overline{12}\overline{25}$
	900 → a^2
(60 + 5)	325 → $(2a + b)b$
2 a + b	325
	0

مثال 2 :

7921 کا جذر معلوم کیجیے۔

حل :

7921 چار ہندسی عدد ہے اِس لیے اس کا جذر دو ہندسی عدد ہوگا اور 7921 کے دو جوڑے ہوں گے $\overline{79}\overline{21}$

دائیں طرف سے دوسرے جوڑے یعنی 79 سے ہمیں دہائی کا ہندسہ حاصل ہوگا۔ ہمیں ایسا عدد درکار ہے جس کا مربع 79 کے برابر یا اس کے قریب ترین ہو مگر اس سے زیادہ نہ ہو۔

8 ایسا عدد ہے جس کا مربع 64 ہے جو کہ 79 کے قریب ترین ہے کیونکہ

9 کا مُربّع 81 ہے جو کہ 79 سے زیادہ ہے پس دہائی کا ہندسہ 8 ہوا اور
8 دہائیاں = 80

$$\begin{array}{r|l} & 80 + 9 \\ \hline 80 & \overline{79}\,\overline{21} \\ & 6400 \\ \hline (2 \times 80 + 9) & 1521 \\ & 1521 \\ \hline & 0 \end{array}$$

مختصر عمل

$$\begin{array}{r|l} & 89 \\ \hline 8 & \overline{79}\ \overline{21} \\ & 64 \\ \hline 169 & 1521 \\ & 1521 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس $\sqrt{7921} = 89$

مشق 8.2

جذر بذریعہ تقسیم معلوم کیجیے۔

1 - 1296
2 - 3025
3 - 4489
4 - 729
5 - 841
6 - 4761
7 - 3364
8 - 4096
9 - 5625
10 - 7396
11 - 9025
12 - 9801

8.4 جذر معلوم کرنا جب مجذور چار ہندسی اعداد سے بڑے ہوں

ہم ایسے مکمل مُربّع قدرتی اعداد کا جذر معلوم کریں گے۔ جن کے جذر تین ہندسی عدد ہوں اسی طریقے کو مزید وسعت دے کر تین سے زیادہ جوڑوں والے اعداد کا جذر بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مثال لینے سے پہلے ہمیں یہ سمجھنا چاہیے کہ $(a+b)^2$ کے کلیے کو کیسے وسعت دی جاسکتی ہے۔

$$(a+b+c)^2$$
$$=[(a+b)+c]^2$$
$$=(a+b)^2+2(a+b)(c)+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=a^2+\{(2a+b)b\}+\{2(a+b)+c\}c$$

مثال 1 :

61504 کا جذر معلوم کیجیے۔

حل

(i) 61504 پانچ ہندسی عدد ہے اس لیے اس کے $\frac{1+5}{2}=3$، تین جوڑے $\overline{6}\,\overline{15}\,\overline{04}$ بنیں گے۔

(ii) اس کا جذر تین ہندسی عدد ہوگا۔ جس میں اکائی، دہائی اور سینکڑے کے ہندسے ہوں گے۔

(iii) دائیں طرف سے تیسرے جوڑے 6 کی مدد سے ہم سینکڑے کے ہندسے کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔ ہم نے ایک ایسا عدد معلوم کرنا ہے جس کا مُربّع 6 کے برابر یا اس سے کم ہو مگر اس سے زیادہ نہ ہو۔

(iv) 2 ایسا عدد ہے جس کا مُربّع '4' ہے جو 6 سے کم ہے کیونکہ 3 کا مُربّع 9 ہے جو کہ 6 سے بڑا ہے۔

(v) اسی طرح جذر میں سینکڑے کا ہندسہ 2 ہوگا اور دو سو = 200

لہٰذا $a=200,\ (a)^2=(200)^2=40000$

اب $a^2 + \{(2a+b)b\} + \{2(a+b)+c\}c = 61504$

یا $\{(2a+b)b\} + \{2(a+b)+c\}c = 61504 - a^2$

یا $= 61504 - 40000$

یا $\{(2a+b)b\} + \{2(a+b)+c\}c = 21504$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a + b + c \\
 & 200 + 40 + 8 \\
\hline
200 & \overline{6}\,\overline{15}\,\overline{04} \\
 & 40000 \longrightarrow a^2 \\
\hline
2 \times 200 + 40 & 21504 \longrightarrow (2a+b)b + \{2(a+b)+c\}c \\
(2a+b) & 17600 \quad (2a+b)b \\
\hline
(400+80+8) & 3904 \longrightarrow \{2(a+b)+c\}c \\
(2a+2b+c) & 3904 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

پہلے جوڑے سے باقی بچنے والے 2 اور دوسرے جوڑے کے ہندسے مل کر " 215 " بناتے ہیں اب اِس سے ہمیں دہائی کا ہندسہ ملتا ہے۔
215 کو 400 $(400 = 2a)$ پر تقسیم کریں تو خارج قسمت 5 آتا ہے اور " 5 " کا مطلب ہے 5 دہائیاں = 50
لیکن اگر اسے 400 میں جمع کر کے حاصل جمع کو 50 سے ضرب دی جائے جو کہ $(2a+b)b$ ہوگا تو حاصل ضرب

$$450 \times 50 = 22500$$

جو کہ 21504 سے بڑا ہے اِس لیے" b "چھوٹا ہوگا 5 سے۔
اگر $b = 4$ تو 4 دہائیاں = 40 اس لیے

$$(20 + b)b = (2 \times 200 + 40) \times 40$$

$$= 440 \times 40 = 17600$$

اس لیے

$$\{(2a+b)b\} + \{2(a+b)+c\}\ c = 21504$$

$$17600 + \{2(a+b)+c\}\ c = 21504$$

$$\{2(a+b)+c\}\ c = 21504 - 17600$$

$$\{2(200+40)+c\}\ c = 3904$$

$$\{480+c\}\ c = 3904$$

$$\{480+8\} \times 8 = 3904$$

480 میں کیا جمع کریں یعنی c کی کیا قیمت ہو کہ اگر حاصل جمع کو c کی قیمت سے ضرب دی جائے تو 3904 حاصل ہو۔

پس $c = 8$

$$a + b + c = 200 + 40 + 8 = 248$$

$$\sqrt{61504} = 248$$

مختصر عمل

	248
2	6 15 04
	4
44	215
	176
488	3904
	3904
	0

پس

$$\sqrt{61504} = 248$$

مثال 2:

316969 کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

316969 چھے ہندسی عدد ہے اس لیے اس کے تین جوڑے بنیں گے،

$\overline{31}\ \overline{69}\ \overline{69}$

اور جذر میں اکائی، دہائی اور سینکڑے کے ہندسے ہوں گے۔

5	$\overline{31}\ \overline{69}\ \overline{69}$	563
	25	
106	6 6 9	(5 کا دوگنا 10 ہے۔)
	6 3 6	
1123	3 3 6 9	(56 کا دوگنا 112 ہے)
	3 3 6 9	
	0	

$\sqrt{31\ 69\ 69} = 563$

مثال 3

4227136 کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

4227136 سات ہندسی عدد ہے اس لیے اس کے $\left(\frac{7+1}{2} = 4\right)$ چار جوڑے بنیں گے اور جذر چار ہندسی عدد ہوگا۔

2	$\overline{4}\ \overline{22}\ \overline{71}\ \overline{36}$	2056
	4	
405	2271	
	2025	
4106	246 36	
	246 36	
	0	

جذر = 2056

مشق 8.3

جذر معلوم کیجیے۔

1 - 16384
2 - 54756
3 - 42025
4 - 120409
5 - 135424
6 - 230400
7 - 313600
8 - 167281
9 - 344569
10 - 93636
11 - 399424
12 - 165649
13 - 1522756
14 - 4218916
15 - 12588304
16 - 10543009
17 - 17732521
18 - 20820969

8.5 کسور اعشاریہ کا جذر (SQUARE ROOT OF DECIMAL FRACTIONS)

سب سے پہلے ہم ایسی کسور اعشاریہ کا جذر معلوم کرنے کا طریقہ سیکھیں گے جو مکمل مربع ہوں اس سے جو طریقہ اخذ ہوگا وہی طریقہ نامکمل مربع کسور اعشاریہ کا جذر معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جائے گا۔

مثال 1:

$(.1)^2 = .01$, $\sqrt{.01} = .1$

$(.2)^2 = .04$, $\sqrt{.04} = .2$

$(.01)^2 = .0001$, $\sqrt{.0001} = .01$

$(.12)^2 = .0144$, $\sqrt{.0144} = .12$

$(.003)^2 = .000009$, $\sqrt{.000009} = .003$

$(.125)^2 = .015625$, $\sqrt{.015625} = .125$

بائیں طرف دیے گئے عمل سے معلوم ہوتا ہے کہ

1۔ مکمل مربع کسور اعشاریہ میں ہمیشہ ہندسوں کی تعداد جفت ہوتی ہے۔

2۔ چونکہ مکمل مربع کسور اعشاریہ میں ہندسوں کی تعداد جفت ہوگی اس لیے جذر میں ہندسوں

کی تعداد مجذور میں ہندسوں کی تعداد کا نصف ہوگی۔

3. کسور اعشاریہ میں جوڑے اس طرح بنائے جاتے ہیں کہ (دسووں اور سوودں) کے مقام پر ہندسوں کا ایک جوڑا (ہزاروں اور دس ہزاروں کے مقام پر ہندسوں کا) دوسرا جوڑا بنے گا اور اسی طرح جوڑے بنانے کا عمل بائیں سے دائیں طرف جاری رہے گا۔ اگر آخر میں دائیں طرف ایک ہندسہ اکیلا رہ جائے تو اُس کے ساتھ صفر شامل کرکے جوڑا مکمل کرلیا جاتا ہے۔

4۔ اگر کسور اعشاریہ میں صحیح عددی حصّہ بھی موجود ہو تو اُس صحیح عدد کے جوڑے اُسی طرح بنائے جاتے ہیں جیسا کہ اس سے پہلے بیان کیا جا چکا ہے۔

مثال 2 :

0.204304 کا جذر معلوم کیجیے۔

حل :

0.204304 کے تین جوڑے $0\,.\,\overline{20}\;\overline{43}\;\overline{04}$ بنیں گے

4	$.\,\overline{20}\;\overline{43}\;\overline{04}$	. 452
	16	
85	443	
	425	
902	1804	
	1804	
	0	

پس $\sqrt{0\,.\,204304} = .\,425$

مثال 3 :

152 . 7696 کا جذر معلوم کیجیے۔

حل :

```
                12.36
        1  | 1̄ 5̄2̄ . 7̄6̄ 9̄6̄
           | 1
       22  | 52
           | 44
      243  | 876
           | 729
     2466  | 14796
           | 14796
           | 0
```

جذر = 12 . 36

مثال 4 :
25796 . کا جذر معلوم کیجیے-جوکہ تین مراتب اعشاریہ تک ہو۔

حل :
2 5796 . پانچ درجی کسر اعشاریہ ہے چونکہ ہمیں جذر تین مراتب اعشاریہ تک درکار ہے۔ اس لیے مجذور میں چھے مراتب اعشاریہ ہونا چاہئیں۔ لہٰذا دائیں طرف ایک صفر لگائیں گے کیونکہ صفر لگانے سے کسر میں کوئی فرق نہیں پڑتا اور کسر تبدیل نہیں ہوتی (ویسے بھی پورے جوڑے بنانے کے لیے دائیں طرف صفر کا اضافہ کیا جاتا ہے)

```
        5  | . 2̄5̄ 7̄9̄ 6̄0̄  | . 507
           |   25
     1007  |   7960
           |   7049
           |   911
```

چونکہ باقی بچنے والی رقم 911 ہے جو کہ 1007 میں "100" کا 5 گُنا سے بڑی ہے اِس لیے جذر میں ہم 7 کی بجائے 8 لکھ سکتے ہیں۔ (ہم نے دراصل 50 کا دوگُنا 100 لیا تھا اور 100 کے دائیں طرف 7 لگایا تھا یہاں 50 کا دوگُنا ہی زیرِ غور لا رہے ہیں۔)

لہٰذا دی ہوئی کسر کا جذر = 508 .

مثال 5 :

54262 . 0085 کا جذر دو مراتب اعشاریہ تک معلوم کیجیے۔

حل :

	232 . 94
2	$\overline{5}\ \overline{42}\ \overline{62}\ .\ \overline{00}\ \overline{85}$
	4
43	142
	129
462	1362
	924
4649	43800
	41841
46584	195985
	186336
	9649

پس $\sqrt{54262.0085}$

$= 232.94$

مشق 8.4

(i) جذر معلوم کیجیے۔

1 - 0 . 09　　2 - 0 . 0441　　3 - 0 . 16

4 - 0 . 0676　　5 - 0 . 3249　　6 - 0 . 066564

7 - 727 . 9204　　8 - 1402 . 5025

9 - 2981 . 16　　10 - 7613 . 609536

11 - 8173 . 064025

(ii) دو مراتب اعشاریہ تک جذر معلوم کیجیے۔

12 - 0 . 2589　　13 - 0 . 3657　　14 - 654 . 69

15 - 987 . 584　　16 - 9573 . 853　　17 - 3698 . 654

(iii) تین مراتب اعشاریہ تک جذر معلوم کیجیے۔

18 - 0 . 564789　　19 - 0. 357948　　20 - 63 . 25411

21 - 987 . 25634　　22 - 5876 . 658

8.6 کسور عام کا جذر (SQUARE ROOT OF Common FRACTIONS)

اگر کسرِ عام مکمل مربع ہو تو شمار کنندہ اور مخرج کا الگ الگ جذر معلوم کرتے ہیں۔ مخلوط کسر کا جذر معلوم کرنے کے لیے پہلے اُسے کسرِ غیرِ واجب میں تبدیل کیا جاتا ہے اور مجذور کے شمار کنندہ کا جذر مطلوبہ جذر کا شمار کنندہ اور مخرج کا جذر مطلوبہ جذر کا مخرج ہوتا ہے۔ نامکمل مربع میں بھی اسی طرح جذر معلوم کیا جا سکتا ہے لیکن ایسی صورت میں بہتر ہوتا ہے کہ کسر اعشاریہ میں تبدیل کر کے جذر معلوم کیا جائے۔ مکمل مربع کسر کے جذر کے لیے بھی یہ طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ جن کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:

$\frac{64}{81}$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

پہلا طریقہ $\frac{64}{81}$ میں شمار کنندہ = 64

شمار کنندہ کا جذر

$= \sqrt{64}$

$= \sqrt{8 \times 8}$

$= \sqrt{(8)^2}$

$= 8$

مخرج = 81

مخرج کا جذر

$= \sqrt{81}$

$= \sqrt{9 \times 9}$

$= \sqrt{(9)^2}$

$= 9$

پس $\sqrt{\frac{64}{81}}$

$= \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}}$

$= \frac{8}{9}$

دوسرا طریقہ:

$\frac{64}{81} = 0.7901$

$\sqrt{\frac{64}{81}}$

$= \sqrt{0.7901}$

$= 0.888$

$= 0.89$ (تقریباً)

مثال 2 :
$14\frac{1}{16}$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل :
کسرِ غیر واجب میں تبدیل کرنے سے $14\frac{1}{16} = \frac{225}{16}$

$$\sqrt{14\frac{1}{16}}$$
$$= \sqrt{\frac{225}{16}}$$
$$= \frac{15}{4}$$
$$= 3\frac{3}{4}$$

مثال 3 :
$\frac{89}{95}$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل

$$\sqrt{\frac{89}{95}} = \sqrt{0.936842}$$

9	$0.\overline{93}\,\overline{68}\,\overline{42}$	.967
	81	
186	1268	
	1116	
1927	15242	
	13489	
	1753	

مثال 4 :
$3\frac{7}{24}$ کا جذر تین مراتب اعشاریہ تک معلوم کیجیے۔

حل :

$$\sqrt{3\frac{7}{24}}$$

$$= \sqrt{\frac{79}{24}}$$

$$= \sqrt{3.291666}$$

اس لیے

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & 3.29\ 16\ 66 & 1.814 \\
 & 1 & \\
\hline
28 & 229 & \\
 & 224 & \\
\hline
361 & 516 & \\
 & 361 & \\
\hline
3624 & 15566 & \\
 & 14496 & \\
\hline
 & 1070 &
\end{array}$$

جذر $= 1.814$

8.5

1۔ جذر معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{49}{81}$ (iii) $\frac{225}{100}$ (iv) $2\frac{46}{49}$

(v) $5\frac{41}{64}$ (vi) $26\frac{25}{36}$ (vii) $40\frac{41}{64}$ (viii) $114\frac{49}{100}$

2۔ دو مراتب اعشاریہ تک جذر معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{79}{92}$ (ii) $2\frac{8}{9}$ (iii) $3\frac{5}{12}$ (iv) $12\frac{1}{18}$

(v) $32\frac{1}{8}$ (vi) $40\frac{2}{5}$

3۔ تین مراتب اعشاریہ تک جذر معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{89}{98}$ (ii) $\frac{107}{205}$ (iii) $1\frac{8}{9}$ (iv) $2\frac{7}{15}$

(v) $4\frac{12}{17}$ (vi) $15\frac{2}{3}$

جذر سے متعلق عبارتی سوالات

مثال 1 :

ایک مربع شکل کے کھیت میں ہل چلانے کا خرچ 1250 روپے ہے جب کہ ہر سو مربع میٹر پر 2 روپے خرچ آتا ہے۔ کھیت کے ایک ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل :

100 مربع میٹر پر خرچ = 2 روپے

کل خرچ = 1250 روپے

اگر خرچ 2 روپے ہو تو رقبہ = 100 مربع میٹر

اگر خرچ 1 روپے ہو تو رقبہ = $\frac{100}{2}$ مربع میٹر

اگر خرچ 1250 روپے ہو تو رقبہ = $\frac{100}{2} \times 1250$

= 62500 مربع میٹر

لہٰذا مربعی شکل کے کھیت کا رقبہ = 62500 مربع میٹر

ایک ضلع کی لمبائی = $\sqrt{62500}$

2	62500	250
	4	
45	225	
	225	
	0	

پس ایک ضلع کی لمبائی = 250 میٹر

مثال 2 :

ایسا چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جسے 68984 میں سے تفریق کیا جائے تو باقی بچ رہنے والا عدد مکمل مربع ہو۔

حل:

یہ معلوم کرنے کے لیے کہ دیئے ہوئے عدد میں سے کون سا عدد تفریق کیا جائے ہم 68984 کا جذر معلوم کریں گے اور جو عدد آخر میں بچ رہے گا وہی مطلوبہ عدد ہوگا۔

2	6 89 84	262
	4	
46	289	
	276	
522	1384	
	1044	
	340	

پس 6 89 84 میں سے 340 تفریق کیا جائے تو باقی بچ رہنے والا عدد 68644 مکمل مربّع ہوگا 68644 دراصل 262 کا مربّع ہے۔

مثال 3:

ایک دائروی شکل کے میدان کی سطح ہموار کرانے کا خرچ بحساب 12 پیسے فی مربّع میٹر 2236 . 08 روپے ہے۔ اس میدان کا رداس معلوم کیجیے۔

حل:

12 پیسے فی مربّع میٹر کے حساب سے کل خرچ = 2236.08 روپے

دائروی شکل کے میدان کا رقبہ = $2236.08 \div \frac{12}{100}$

$= \frac{2236.08 \times 100}{12}$

= 18634 مربّع میٹر

ہم جانتے ہیں کہ دائروی علاقہ کا رقبہ = $\pi \times r^2$

اس لیے

$$\pi \times r^2 = 18634$$

$$r^2 = 18634 \div \frac{22}{7}$$

$$= 18634 \times \frac{7}{22}$$

$$= 5929$$

$$r = \sqrt{5929}$$

$$r = 77$$

چونکہ

7	5929	77
	49	
147	1029	7
	1029	
	0	

پس رداس = 77 میٹر

مشق 8.6

1۔ ایک مُربعی علاقے کا رقبہ 403225 مربّع میٹر ہے اس کے ضلعے کی لمبائی معلوم کیجیے۔

2۔ ایک مُربعی کھیت میں گنّا کاشت کرنے کا خرچ بحساب 6 پیسے فی مُربع میٹر 5840.64 روپے ہے کھیت کے ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

3۔ ایک مستطیلی کھیت کا طول عرض سے $2\frac{1}{2}$ گنا ہے اگر اس کا رقبہ 49000 مربّع میٹر ہو تو اس کا طول معلوم کیجیے۔

4۔ ایک مستطیل کھیت کا عرض طول کا آدھا ہے اگر اس میں ہل چلانے کا خرچ بحساب 2 پیسے فی مُربّع میٹر 151.20 روپے ہو تو اس کا عرض معلوم کیجیے۔

5۔ ایک دائروی علاقہ کا رقبہ 38.50 مُربّع ڈیسی میٹر ہے۔ اس کا قطر معلوم کیجیے۔ جب کہ ($\pi = \frac{22}{7}$)

6۔ ایک دائروی میدان کے اندر گھاس لگوانے کا خرچ بحساب 7 پیسے فی مربّع میٹر

445.50 روپے ہے اس کا قطر معلوم کیجیے۔

7۔ 15625 پودے اس طرح لگانا ہیں کہ ہر قطار میں اتنے ہی پودے آئیں جتنی کہ قطاروں کی تعداد ہو۔ بتایے ایک قطار میں کتنے پودے لگیں گے ؟ کل قطاریں کتنی ہوں گی ؟

8۔ اگر قطاروں کی تعداد کو ایک قطار میں پودوں کی تعداد سے ضرب دی جائے تو حاصل ضرب 253009 آتا ہے جبکہ قطاروں کی تعداد ایک قطار میں پودوں کی تعداد کے برابر ہے۔ بتایئے ایک قطار میں کتنے پودے ہیں ؟

9۔ وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد بتایے جسے 97531 میں سے تفریق کیا جائے تو حاصل تفریق کامل مُربّع ہو۔

10۔ وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد تبلایے جو 109087 میں سے تفریق کیا جائے تو حاصل تفریق کامل مُربّع ہو۔

11۔ وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد بتایے جو 875 میں جمع کیا جائے تو حاصل جمع کامل مُربّع ہو۔

(اشارہ: 875 کا جذر معلوم کرنے کے عمل میں 29 جذر آتا ہے جبکہ 34 باقی بچ رہتا ہے اب 29 سے اگلا عدد 30 ہے اس 30 کا مُربّع لے کر اس میں سے 875 تفریق کریں تو مطلوبہ عدد حاصل ہوگا)

12۔ وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جو 13579 میں جمع کیا جائے تو حاصل جمع کامل مُربّع ہو۔

باب 9

جیومیٹری

(Geometry)

9.1 مسئلہ فیثاغورث

مثال 1 :

ABC △ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے
جس کا زاویہ B قائمہ ہے۔
ہم جانتے ہیں کہ قائمۃ الزاویہ مثلث میں
زاویہ قائمہ کا متقابلہ ضلع وتر کہلاتا ہے۔
ABC △ میں $\overline{AC}$ وتر ہے جبکہ
$\overline{BC}$ قاعدہ اور $\overline{AB}$ عمود ہے۔
اِس مثلث میں

$m\overline{AC} = 5$ cm, $m\overline{BC} = 4$ cm, $m\overline{AB} = 3$ cm

($m\overline{AB}$ سے مُراد " $\overline{AB}$ " کی مقدار اور " cm " سے مراد سینٹی میٹر " ہے۔)

$$(m\overline{AC})^2 = (5)^2 = 25$$

$$(m\overline{AB})^2 = (3)^2 = 9$$

$$(m\overline{BC})^2 = (4)^2 = 16$$

$$(m\overline{AB})^2 + (m\overline{BC})^2 = 9 + 16$$

$$= 25$$

$$= (m\overline{AC})^2$$

مثال 2 :

ABC △ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں زاویہ B قائمہ ہے جبکہ $\overline{AC}$ وتر

$\overline{BC}$ قاعدہ اور $\overline{AB}$ عمود ہے اور

$m\,\overline{AB} = .5\text{ cm}, m\,\overline{BC} = 1.2\text{ cm}, m\,AC = 1.3\text{ cm}$

(عمود کی مقدار)^2 + (قاعدہ کی مقدار)^2

$= (m\,\overline{BC})^2 + (m\,\overline{AB})^2$

$= (1.2)^2 + (.5)^2$

$= 1.44 + .25$

$= 1.69$

$= (1.3)^2$

$= (m\,\overline{AB})^2$

= (وتر کی مقدار)^2

مثال 3:

قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں

$m\,\overline{AB} = 1.6\text{ cm}, m\,\overline{BC} = 3\text{ cm},$

$m\,\overline{AC} = 3.4\text{ cm}.$

اور

$(m\,\overline{AB})^2 + (m\,\overline{BC})^2$

$= (1.6)^2 + (3)^2$

$= 2.56 + 9$

$= 11.56$

$= (3.4)^2$

$= (m\,\overline{AC})^2$

تینوں مثالوں کی مدد سے ہم دیکھتے ہیں کہ قائمۃ الزاویہ مثلث میں

(قاعدہ کی مقدار)^2 + (عمود کی مقدار)^2 = (وتر کی مقدار)^2

اِس مسئلے کو آج سے کوئی 2500 برس سے بھی زیادہ پہلے ایک یونانی ریاضی دان فیثا غورث نے دریافت کیا تھا اسی لیے اسے مسئلہ فیثا غورث کہتے

ہیں۔ اِس مسئلہ کا ثبوت ہم اگلی جماعتوں میں پڑھیں گے۔ یہاں صرف شکل کی مدد سے اِس مسئلہ کا ثبوت دیا جا رہا ہے۔

صدیوں سے پہلے اِس حقیقت کو زاویہ قائمہ بنانے کے لیے استعمال کیا جاتا تھا کہ ایسی مثلث قائمۃ الزاویہ ہوتی ہے۔ جس کے اضلاع کی لمبائیاں، 3 ،4 اور 5 اکائیاں ہوں۔ مثلاً

C

A B

سامنے دی ہوئی مثلث میں۔
قاعدہ AB کو ایک مُربّع کا قاعدہ بنا کر
4 سم ضلع کا ایک مُربّع بنا لیے اور
اس میں 1 سم مُربّع کے خانے بنا لیے
(1 سم مُربّع سے مُراد ایک ایسا مُربّع
ہے جس کے ضلع کی لمبائی 1 سم ہو)
ہم دیکھتے ہیں کہ اِس طرح 16 خانے بنتے ہیں
اِسی طرح عمود اور وتر پر مُربّعے بنا لیے اور انھیں
1 مُربّع سم خانوں میں تقسیم کیجیے۔ عمود پر مُربّع
میں ایسے خانوں کی تعداد 9 اور وتر پر مُربّع میں
ایسے خانوں کی تعداد 25 ہے۔

اَب
عمود پر کے مُربّع کے خانوں کی تعداد + قاعدہ پر کے مُربّع کے خانوں کی تعداد

$= 9 + 16$

$= 25$

وتر پر مُربّع کے خانوں کی تعداد = 25

پس مسئلہ فیثا غورث کی رُو سے، کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں

^{2}(وتر کی مقدار) = ^{2}(عمود کی مقدار) + ^{2}(قاعدہ کی مقدار)

اگر وتر کی مقدار کو " a " قاعدہ کی مقدار کو ' c ' اور عمود کی مقدار کو ' b ' سے ظاہر کیا جائے تو

$$(a)^2 = (b)^2 + (c)^2$$

مندرجہ بالا تینوں مقداروں میں سے کوئی بھی دو مقداریں دی گئی ہوں تو تیسری مقدار معلوم کی جاسکتی ہے۔

$$(a)^2 = (b)^2 + (c)^2$$

$$(b)^2 = (a)^2 - (c)^2$$

$$(c)^2 = (a)^2 - (b)^2$$

مثال 4 :

اگر کسی قائمۃ الزاویہ مثلث جس میں $m\angle A = 90^\circ$ ہو اور $c = 5, b = 12,$ تو 'a' معلوم کیجیے۔

حل :

ہمیں وتر کی مقدار یعنی 'a' معلوم کرنا ہے۔

قاعدہ کی مقدار

$= c = 5$

عمود کی مقدار

$= b = 12$

مسئلہ فیثاغورث کی رُو سے

$$(a)^2 = (b)^2 + (c)^2$$

یا $= (12)^2 + (5)^2$

یا $= 144 + 25$

یا $= 169$

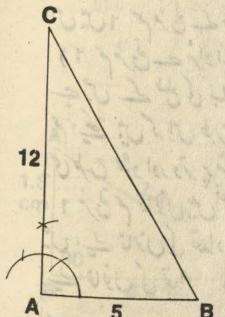
یا $= \sqrt{169}$

یا $a = 13$

مثال 5 :

ایک مستطیل کی لمبائی 6 سم اور چوڑائی 3 سم ہے۔ اس کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : ABCD ایک مستطیل ہے جس کا ایک وتر BD ہے۔

D C A B 6cm 3cm 90^0

BAD قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

جس میں

$m\,\overline{AB} = 6\text{ cm}, m\,\overline{AD} = 3\text{ cm}$

مسئلہ فیثا غورث کی رُو سے

$$(m\overline{BD})^2 = (m\,\overline{AB})^2 + (m\,\overline{AD})^2$$
$$= (6)^2 + (3)^2$$
$$= 36 + 9$$
$$= 45$$
$$m\,\overline{BD} = \sqrt{45}$$
$$= 6.71$$

پس وتر کی لمبائی = 6.71 سم

مثال 6:

قائمۃ الزاویہ مثلث کی شکل کے ایک پلاٹ کے وتر کی مقدار 52 میٹر اور قاعدہ کی مقدار 48 میٹر ہے۔ پلاٹ کے عمود کی مقدار بتایئے۔

حل:

وتر کی مقدار = 52 میٹر

قاعدہ کی مقدار = 48 میٹر ، عمود کی مقدار = ؟

عمود کی مقدار

$= \sqrt{(\text{وتر کی مقدار})^2 - (\text{قاعدہ کی مقدار})^2}$

$$= \sqrt{(52)^2 - (48)^2}$$
$$= \sqrt{2704 - 2304}$$
$$= \sqrt{400}$$
$$= 20$$ (میٹر)

مشق 9.1

1 - قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کی مقدار معلوم کیجیے اگر :۔

(i) قاعدہ کی مقدار = 8 سم ، عمود کی مقدار = 6 سم

(ii) قاعدہ کی مقدار = 5 سم ، عمود کی مقدار = 12 سم

(iii) قاعدہ کی مقدار = 24 سم ، عمود کی مقدار = 7 سم

2 - قائمۃ الزاویہ مثلث کے قاعدہ کی مقدار معلوم کیجیے اگر :۔

(i) وتر کی مقدار = 5 سم ، عمود کی مقدار = 4 سم

(ii) وتر کی مقدار = 13 سم ، عمود کی مقدار = 5 سم

(iii) وتر کی مقدار = 34 سم ، عمود کی مقدار = 30 سم

3 - قائمۃ الزاویہ مثلث میں عمود کی مقدار معلوم کیجیے اگر :۔

(i) وتر کی مقدار = 17 سم ، قاعدہ کی مقدار = 15 سم

(ii) وتر کی مقدار = 3.4 سم ، قاعدہ کی مقدار = 3 سم

(iii) وتر کی مقدار = 14 سم ، قاعدہ کی مقدار = 8 سم

4 - قائمۃ الزاویہ مثلثی شکل کے ایک پلاٹ کے وتر کی مقدار 25 میٹر اور عمود کی مقدار 15 میٹر ہے۔ پلاٹ کے قاعدہ کی مقدار معلوم کیجیے۔

5 - زمین کا ایک ٹکڑا قائمۃ الزاویہ مثلثی شکل کا ہے جس کے قاعدہ کی مقدار 12 میٹر اور وتر کی مقدار 20 میٹر ہے۔ عمود کی مقدار کیا ہوگی ؟

6 - زمین کا ایک ٹکڑا قائمۃ الزاویہ مثلثی شکل کا ہے جس کے وتر کی مقدار 34 میٹر اور عمود کی مقدار 16 میٹر ہے۔ اس کے قاعدہ کی مقدار معلوم کیجیے۔

7 - اگر ایک مُربّع کے ضلع کی مقدار 4 سم ہو تو اس کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

8 - ایک سیڑھی 3 میٹر لمبی ہے۔ اُسے دیوار کے ساتھ لگانے پر اُس کا نچلا پایہ دیوار سے 1.4 میٹر کے فاصلے پر تھا۔ بتایے سیڑھی دیوار کی کتنی اُونچائی تک

پہنچتی ہے۔

9 ۔ ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اور رداس 14 سم ہے۔ اِس میں $\overline{QR}$ رداسی قطعہ $\overline{OX}$ کا عمودی ناصف ہے۔
$\overline{QR}$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

Y
Q
X
X
0
7 سم
p
R
Y

اشکال کی بناوٹ

9.2 کسی دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچنا

پچھلی جماعتوں میں ہم ایک زاویے کے متماثل زاویہ بنانا سیکھ چکے ہیں اب ہم متوازی خط کھینچنے کا طریقہ سیکھتے ہیں۔

مثال 1 :

$\overleftrightarrow{AB}$ کے متوازی ایک خط کھینچیے۔

عمل : پہلا طریقہ :۔

(1) $\overleftrightarrow{AB}$ کھینچا۔

(2) کوئی سا نقطہ E لیا جو کہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر واقع نہیں ہے۔

(3) $\overleftrightarrow{AB}$ پر کوئی سا نقطہ F لیا۔

(4) ایک قطعۂ خط $\overline{EF}$ کھینچا۔

(5) نقطہ E پر زاویہ BFE کے متماثل ایک زاویہ FEC بنایا۔

(6) $\overleftrightarrow{CE}$ پر ایک نقطہ D لیا۔

(7) $\overleftrightarrow{CD}$ مطلوبہ خط ہے جو کہ $\overleftrightarrow{AB}$ کے متوازی ہے۔

دوسرا طریقہ :۔

سیٹ سکوئر اور پیمانے کی مدد سے $\overleftrightarrow{AB}$ کے متوازی خط کھینچنا۔

عمل :

(i) AB خط کھینچا۔

(ii) $\overleftrightarrow{AB}$ سے باہر ایک نقطہ C لیا۔

(iii) اب ایک سیٹ سکوئر کے بڑے کنارے کو پیمانے کے ساتھ اِس طرح رکھّا کہ سیٹ سکوئر کا ایک کِنارا $\overleftrightarrow{AB}$ کو چھُو رہا ہو۔

(iv) سیٹ سکوئر کو اُوپر کی طرف سَرکایا جَب اس کا اُوپر کا کنارا نقطہ C کو چھُونے لگا تو نقطہ C میں سے گزرتا ہوا خط $\overleftrightarrow{EF}$ کھینچا۔

(v) پس $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

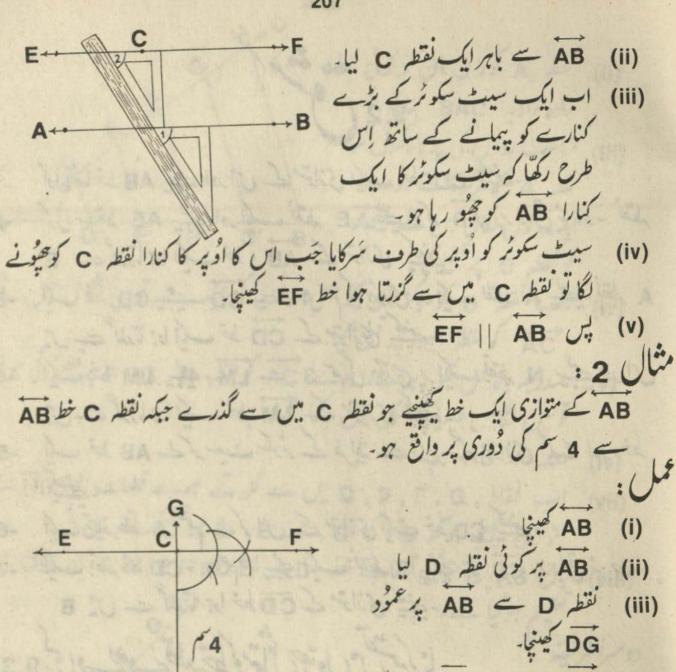
مثال 2 :

خط $\overleftrightarrow{AB}$ کے متوازی ایک خط کھینچیے جو نقطہ C میں سے گذرے جبکہ نقطہ C خط $\overleftrightarrow{AB}$ سے 4 سم کی دُوری پر واقع ہو۔

عمل :

(i) $\overleftrightarrow{AB}$ کھینچا

(ii) $\overleftrightarrow{AB}$ پر کوئی نقطہ D لیا

(iii) نقطہ D سے $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمُود $\overrightarrow{DG}$ کھینچا۔

(iv) $\overrightarrow{DG}$ میں سے $\overline{DC}$ ، 4 سم لمبائی میں قطع کیا۔

$(m\overline{DC} = 4 \text{ cm})$

(v) $\overline{DC}$ پر $\overleftrightarrow{EF}$ عمُود کھینچا۔

(vi) پس $\overleftrightarrow{EF}$ مطلوبہ خط ہے جو کہ $\overleftrightarrow{AB}$ کے متوازی ہے اور اس سے 4 سم کی دُوری پر ہے۔

مشق 9.2

-1 کوئی سا خط AB لیجیے اور اس کے متوازی ایک خط CD کھینچیے۔

-2 کوئی سا خط AB لیجیے اور ایک نقطہ E لیجیے جو کہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر واقع نہ ہو۔ نقطہ E سے گذرتا ہوا ایک خط، $\overleftrightarrow{AB}$ کے متوازی کھینچیے۔

-3 ایک خط CD لیجیے۔ $\overleftrightarrow{CD}$ سے 4 سم کی دُوری پر ایک نقطہ A لیجیے۔ نقطہ A میں سے گذرتا ہوا ایک خط $\overleftrightarrow{CD}$ کے متوازی کھینچیے۔

-4 ایک خط LM لیجیے۔ $\overleftrightarrow{LM}$ سے 3 سم کی دُوری پر ایک نقطہ N لیجیے اور اس میں سے گذرتا ہوا ایک خط $\overleftrightarrow{LM}$ کے متوازی کھینچیے۔

-5 ایک خط AB لے کر سیٹ سکوئر کے طریقہ سے اس کے متوازی ایک اور خط کھینچیے۔

-6 ایک قطعہ خط 6 سم لے کر اس کے متوازی ایک خط CD کھینچیے۔

-7 ایک قطعہ خط CD، 7 سم لمبا لیجیے ایک نقطہ B لیجیے جو $\overleftrightarrow{CD}$ پر واقع نہ ہو۔ B میں سے گذرتا ہوا خط $\overline{CD}$ کے متوازی کھینچیے۔

9.3 کسی دیے ہوئے قطعہ خط کو متماثل حصّوں میں تقسیم کرنا

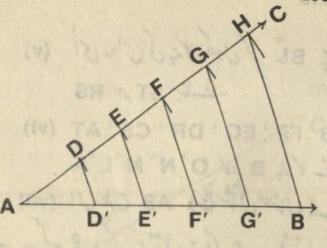
قطعۂ خط کو دو یا چار متماثل حصّوں میں تقسیم کرنے کا طریقہ ہم پچھلی جماعت میں سیکھ چکے ہیں۔ اب ہم قطعہ خط کو تین یا پانچ یا پانچ سے زیادہ متماثل حصّوں میں تقسیم کرنے کا طریقہ سیکھتے ہیں۔

مثال 1 :

ایک قطعہ خط AB، 5 سم لمبا کھینچیے اور اسے 5 متماثل حصّوں میں تقسیم کیجیے۔

حل : پہلا طریقہ

عمل :

(i) $\overline{AB}$، 5 سم لمبا کھینچا۔

(ii) نقطہ A کو راس مان کر کوئی سا حادہ زاویہ BAC بنایا۔

(iii) مناسب رداس کی پرکار کھول کر نقطہ A کو مرکز مانتے ہوئے ایک قوس لگائی جس نے $\overrightarrow{AC}$ کو نقطہ D پر قطع کیا۔

(iv) اب نقطہ D کو مرکز مان کر اسی رداس کی ایک اور قوس لگائی جس نے $\overrightarrow{AC}$ کو نقطہ E پر قطع کیا۔

(v) مندرجہ بالا عمل کو دہراتے ہوئے $\overrightarrow{AC}$ کو نقطہ H , G , F پر قطع کرتی ہوئی قوسیں لگائیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

(iv) قطعہ خط HB کھینچا۔

(vii) اب نقاط D , E , F , G میں سے گزرتے ہوئے قطعات خط $\overline{HB}$ کے متوازی کھینچے جو کہ $\overline{AB}$ کو D′ , E′ , F′, G′ پر قطع کرتے ہیں۔

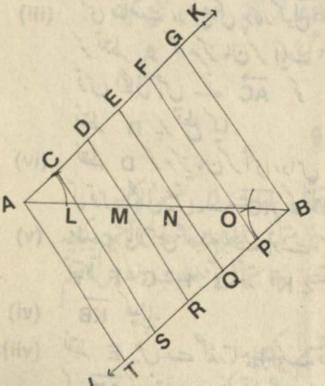
(viii) پس AB پانچ متماثل قطعاتِ خط A D′ , D′E′, E′F′, F′G′ اور $\overline{GB}$ میں تقسیم ہو گیا ہے۔

دوسرا طریقہ

(i) ایک قطعہ خط AB , 5 سم لمبا کھینچا۔

(ii) نقطہ A پر کوئی سا حادہ زاویہ BAK بنایا۔

(iii) نقطہ B پر BAK کے متماثل زاویہ ABL بنایا۔

(iv) مناسب رداس کی پرکار کھول کر $\overrightarrow{AK}$ پر پانچ متماثل قطعاتِ خط AC ، CD ، DE ، EF ، FG بنایئے۔

(v) اُسی رداس کی پرکار کھول کر $\overrightarrow{BL}$ پر پانچ متماثل قطعاتِ خط BP ، PQ ، QR
RS اور ST بنائیے۔

(vi) AT ، CS ، DR ، EQ ، FP ، GB قطعات خط کھینچیے جو AB کو نقاط
A، L، M، N، O اور B پر کاٹتے ہیں۔

(vii) اس طرح AB پانچ متماثل حصّوں میں تقسیم ہوگیا۔

9.3 کسی دیے ہوئے قطعہ خط کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا

مثال :

ایک قطعہ خط 7.7 سم لمبا کھینچیے اور اُسے 2:5 میں تقسیم کیجیے۔

حل : پہلا طریقہ

نسبتی مجموعہ :

2 + 5 = 7

A ، 2 ، M ، 5 ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، J ، K

(i) $\overline{AB}$ 7.7 سم لمبا کھینچا۔

(ii) ایک حادہ زاویہ BAC بنایا۔

(iii) کسی مناسب رداس کی پرکار کھول کر نقطہ A کو مرکز مان کر ایک قوس لگائی جس نے $\overrightarrow{AC}$ کو نقطہ D پر قطع کیا۔

(iv) نقطہ D کو مرکز مان کر اُسی رداس کی قوس لگائی جس نے $\overrightarrow{AC}$ کو نقطہ E پر قطع کیا۔

(v) مندرجہ بالا عمل کو دہراتے ہوئے اُسی رداس کی قوسیں لگائیں جو $\overrightarrow{AC}$ کو نقاط F ، G ، H ، J اور K پر قطع کرتی ہیں۔

(vi) $\overline{KB}$ کھینچا۔

(vii) نقطہ E میں سے گذرتا ہوا ایک قطعہ خط ، $\overline{KB}$ کے متوازی کھینچا جو کہ $\overline{AB}$ کو نقطہ M پر قطع کرتا ہے۔

(viii) پس $\overline{AB}$ کی مطلوبہ تقسیم یوں ہوئی۔

$$m\overline{AM} : m\overline{MB} = 2:5$$

دوسرا طریقہ

(i) ایک قطعہ خط AB 7.7 سم لمبا کھینچا۔

(ii) نقطہ A پر کوئی سا حادہ زاویہ BAC بنایا۔ اور اس زاویہ کے متماثل زاویہ ABD بنایا۔

(iii) کسی مناسب رداس کی پرکار کھول کر نقطہ A سے شروع کرکے دو متماثل قطعات خط AE اور EF بنائے۔

(iv) $m\overline{AE}$ رداس کی پرکار کھول کر نقطہ B کو مرکز مان کر پانچ متماثل قطعات خط BG ، GH ، HK ، KL اور $\overline{LM}$ بنائے۔

(v) نقطہ F کو M سے ملایا۔ جس سے $\overline{AB}$ کو نقطہ N پر قطع کیا۔

(vi) $\overline{AB}$ نقطہ N پر 2:5 میں تقسیم ہوگیا۔

مشق 9.3

1- ایک قطعہ خط 3 سم لمبا لیجیے اور اُسے 3 متماثل قطعات میں تقسیم کیجیے۔

2- ایک قطعہ خط 9.5 سم لمبا لے کر اُسے 5 متماثل قطعاتِ خط میں تقسیم کیجیے۔

3- ایک قطعہ خط AB کی لمبائی 6.6 سم ہے۔ اسے 6 متماثل قطعاتِ خط میں تقسیم کیجیے۔

4- 14 سم لمبے قطعہ خط کو 4 نسبت 3 میں تقسیم کیجیے۔

5- 18 سم لمبے قطعہ خط کو 3 نسبت 6 میں تقسیم کیجیے۔

-6   7.2 سم لمبے قطعہ خط کو 3 نسبت 5 میں تقسیم کیجیے۔

-7   8.4 سم لمبے قطعہ خط کو 4 نسبت 8 میں تقسیم کیجیے۔

-8   9.9 سم لمبے قطعہ خط کو 4 نسبت 5 میں تقسیم کیجیے۔

-9   ایک قطعہ خط 8.8 سم لمبا کھینچیں اور اس کا $\frac{3}{8}$ حصہ قطع کریں۔

-10   8.4 سم لمبے قطعہ خط کو 1:2:3 میں تقسیم کیجیے۔

9.4 چوکور کی بناوٹ :

پچھلی جماعتوں میں ہم مثلث، مستطیل اور متوازی الاضلاع بنانے کے طریقے سیکھ چکے ہیں۔ اب ہم چوکور اور معیّن بنانے کے طریقے سیکھیں گے۔

مثال 1 :

چوکور ABCD بنایئے جبکہ اس کے چاروں اضلاع اور ایک زاویہ کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہوں :۔

$$m\,\overline{AB} = 4.5\text{ cm},\ m\,\overline{BC} = 5.6\text{ cm},\ m\,\overline{CD} = 3.7$$

$$m\,DA = 6\text{ cm} \quad m\angle ABC = 50^0$$

عمل :

(i) $\overline{AB}$ 4.5 سم لمبا کھینچا۔

(ii)   ABC ∠ بنایا جس کی مقدار 50^0 ہے۔

(iii) $m\,\overline{BC} = 5.6$ cm قطع کیا

(iv)   A کو مرکز مان کر 6 سم کی قوس لگائی۔

(v)   C کو مرکز مان کو 3.7 سم رداس کی قوس لگائی جس نے پہلی قوس کو نقطہ D پر قطع کیا۔

(vi) $\overline{AD}$ اور $\overline{CD}$ کھینچے۔

(vii)   ABCD مطلوبہ چوکور ہے

مثال 2: چوکور LMNP بنایے جبکہ اس کے چاروں اضلاع اور ایک وتر کی مقداریں مندجہ ذیل ہیں۔

$m\,\overline{LM} = 5$ cm, $m\,\overline{MN} = 4.8$ cm, $m\,\overline{NP} = 7$ cm

$m\,\overline{PL} = 7.9$ cm $m\,\overline{NL} = 8$ cm

عمل:

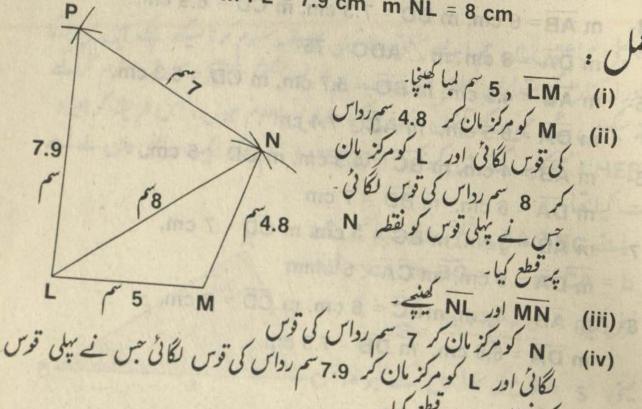
(i) $\overline{LM}$, 5 سم لمبا کھینچا۔

(ii) M کو مرکز مان کر 4.8 سم رداس کی قوس لگائی اور L کو مرکز مان کر 8 سم رداس کی قوس لگائی۔ جس نے پہلی قوس کو نقطہ N پر قطع کیا۔

(iii) $\overline{MN}$ اور $\overline{NL}$ کھینچے۔

(iv) N کو مرکز مان کر 7 سم رداس کی قوس لگائی اور L کو مرکز مان کر 7.9 سم رداس کی قوس لگائی جس نے پہلی قوس کو نقطہ P پر قطع کیا۔

(v) $\overline{NP}$ اور $\overline{PL}$ کھینچے۔
پس LMNP مطلوبہ چوکور ہے۔

مشق 9.4

1- چوکور ABCD بنایے جبکہ
$m\overline{AB} = 5$ cm, $m\,\overline{BC} = 6.3$ cm, $m\,\overline{CD} = 7$ cm, $m\,\overline{DA} = 7.6$ cm
$m\angle ABC = 60^0$

2- $m\,\overline{AB} = 3.5$ cm, $m\,\overline{BC} = 4.5$ cm, $m\,\overline{CD} = 5$ cm,

$m\,\overline{DA} = 6.5$, $m\angle BAD = 48^0$

3- $m\,\overline{AB} = 4.6$ cm, $m\,\overline{BC} = 5.7$ cm, $m\,\overline{CD} = 6.2$ cm,

$m\,\overline{DA} = 6$ cm, $m\angle BCD = 70^0$

4- $m\,\overline{AB} = 6$ cm, $m\,\overline{BC} = 7.3$ cm, $m\,\overline{CD} = 6.9$ cm,

$m\,\overline{DA} = 8$ cm, $m\angle ADC = 75^0$

5- $m\,\overline{AB} = 4.5$ cm, $m\,\overline{BC} = 5.7$ cm, $m\,\overline{CD} = 6.3$ cm,

$m\,\overline{DA} = 5.5$ cm, $m\,\overline{AC} = 7.4$ cm

6- $m\,\overline{AB} = 4$ cm, $m\,\overline{BC} = 4.5$ cm, $m\,\overline{CD} = 5$ cm,

$m\,\overline{DA} = 6$ cm, $m\,\overline{BD} = 7$ cm

7- $m\,\overline{AB} = 3$ cm, $m\,\overline{BC} = 5$ cm, $m\,\overline{CD} = 7$ cm,

$m\,\overline{DA} = 9$ cm, $m\,\overline{CA} = 6$ cm

8- $m\,\overline{AB} = 4$ cm, $m\,\overline{BC} = 6$ cm, $m\,\overline{CD} = 8$ cm,

$m\,\overline{DA} = 6.8$ cm, $m\,\overline{DB} = 7.5$ cm

مثلثی علاقہ کا رقبہ

پچھلی جماعتوں میں ہم ایسے مثلثی علاقوں کا رقبہ معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں جن کے قاعدہ اور ارتفاع کی مقداریں معلوم ہوں۔ اب ہم ایسے مثلثی علاقوں کا رقبہ معلوم کرنے کا طریقہ سیکھیں گے جن کے تینوں اضلاع کی مقداریں معلوم ہوں۔ اس طریقہ کو ہیرو (HERO) کا کلیہ کہتے ہیں کیونکہ (HERO) نام کے ایک ریاضی دان نے اسے دریافت کیا تھا۔

سامنے ABC $\triangle$ ایک مثلثی علاقہ ہے جس میں

$m\overline{AB} = c,\ m\overline{BC} = a,\ m\overline{CA} = b$

فرض کریں $S = \dfrac{a+b+c}{2}$

یعنی S اضلاع کی مقداروں کے مجموعہ کے نصف کے برابر ہے۔

ہیرو کے کلیہ کے مطابق مثلثی علاقہ ABC کا رقبہ مندرجہ ذیل ہوگا:

مثلثی علاقہ ABC کا رقبہ

$= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

اس کلیہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:

اگر ABC $\triangle$ کے اضلاع کی لمبائیاں بالترتیب 15 سم، 36 سم اور 39 سم ہوں تو مثلثی علاقہ ABC کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل:

$a = 15,\ b = 36,\ c = 39$

$S = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$= \frac{15 + 36 + 39}{2}$$

$$= \frac{90}{2}$$

$$= 45$$

$$S - a = 45 - 15 = 30$$

$$S - b = 45 - 36 = 9$$

$$S - c = 45 - 39 = 6$$

مثلثی علاقہ کا رقبہ

$$= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \sqrt{45 \times 30 \times 9 \times 6}$$

$$= \sqrt{(3 \times 3 \times 5) \times (5 \times 2 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 2)}$$

$$= \sqrt{\overline{3 \times 3} \times \overline{5 \times 5} \times \overline{3 \times 3} \times \overline{3 \times 3} \times \overline{2 \times 2}}$$

$$= 3 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2$$

$= 270$ (مُربع سم)

مثال 2 :

اگر کسی مثلثی علاقہ ABC میں

$$a = 12\ ,\ b = 30\ ,\ c = 20$$

تو مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل :

$$a = 12\ ,\ b = 30\ ,\ c = 20$$

$$S = \frac{12 + 30 + 20}{2}$$

$$= \frac{62}{2}$$

$$= 31$$

$S - a = 31 - 12 = 19$

$S - b = 31 - 30 = 1$

$S - c = 31 - 20 = 11$

مثلثی علاقہ ABC کا رقبہ

$= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$= \sqrt{31 \times 19 \times 1 \times 11}$

$= \sqrt{6479}$

$= 80.49$ (مُربّع اکائیاں تقریباً)

مشق 9.5

1۔ مثلثی علاقوں کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ ان کے اضلاع کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہیں.

(i) 14 cm, 21 cm, 25 cm

(ii) 30 cm, 40 cm, 50 cm

(iii) 43 dm, 47 dm, 50 dm

(iv) 52 ڈیکا میٹر، 73 ڈیکا میٹر، 75 ڈیکا میٹر

(v) 79 ہیکٹو میٹر ، 46 ہیکٹو میٹر، 91 ہیکٹو میٹر

(vi) 103 dm, 115 dm, 130 dm

(vii) 120 dm 130 dm, 140 dm

(viii) 150m, 176m, 200m

9.5 چوکوروی علاقوں کا رقبہ

ہیرو کے کلیہ کی مدد سے چوکوروی علاقوں کا رقبہ معلوم کرنے کی وضاحت مندرجہ ذیل ہے۔

مثال 1 :

ایک چوکوروی علاقہ ABCD کے اضلاع کی لمبائیاں بالترتیب 19 سم 12 سم، 15 سم اور 20 سم ہیں جبکہ ایک وترCA کی لمبائی23 سم ہے چوکوروی علاقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

A
20 سم
D
23 سم
19 سم
15 سم
B
C
12 سم

حل :

چوکوروی علاقہ ABCD دو مثلثی علاقوں ABC اور ACD پر مشتمل ہے۔ لہٰذا
چوکوروی علاقہ ABCD کا رقبہ = مثلثی علاقہ ABC کا رقبہ + مثلثی علاقہ ACD کا رقبہ
ہر دو مثلثی علاقوں کے رقبے الگ الگ معلوم کرکے مجموعہ معلوم کرنے سے چوکوروی علاقہ کا رقبہ حاصل ہوگا۔

مثلث ABC میں

$m\,\overline{AB} = 19\text{ cm}\ ,\ m\,\overline{BC}\ 12\text{ cm}\ ,\ m\,\overline{AC} = 23\text{ cm}$

اگر اضلاع کی لمبائیوں کے مجموعے کا نصف برابر S ہو تو

$$S = \frac{19 + 12 + 23}{2}$$

$$= \frac{54}{2}$$

$$= 27$$

مثلثی علاقے ABC کا رقبہ

$$= \sqrt{27\,(27 - 19)\,(27 - 12)\,(27 - 23)}$$

$$= \sqrt{27 \times 8 \times 15 \times 4}$$

$= 113.84$ (مُربّع سم تقریباً)

مثلث ACD میں :

$m\overline{AC} = 23$ cm, $m\overline{CD} = 15$ cm, $m\overline{DA} = 20$ cm

اگر اضلاع کی لمبائیوں کے مجموعہ کا نصف برابر S ہو تو

$$S = \frac{20 + 15 + 23}{2}$$

$$= \frac{58}{2}$$

$$= 29$$

مثلثی علاقہ ACD کا رقبہ

$$= \sqrt{29\,(29 - 20)\,(29 - 15)\,(29 - 23)}$$

$$= \sqrt{29 \times 9 \times 14 \times 6}$$

$= 148.07$ (مُربّع سم تقریباً)

چوکوروی علاقہ ABCD کا رقبہ

$= 113.84 + 148.07$

$= 261.91$ (مُربّع سم تقریباً)

مثال 2 :

چوکوروی علاقہ ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ

$m\overline{AB} = 12$ cm, $m\overline{BC} = 14$ cm, $m\overline{CD} = 17$ cm,

$m\overline{AD} = 19$ cm, $m\overline{BD} = 21$ cm

حل :

چوکوروی علاقہ ABCD کا رقبہ = مثلثی علاقہ ABD کا رقبہ + مثلثی علاقہ BCD کا رقبہ

C, B, D, A, 14 cm, 17 cm, 21 cm, 12 cm, 19 cm

اگر ABD △ کے لیے اضلاع کی لمبائیوں کے مجموعہ کا نصف برابر S ہو تو

$$S = \frac{21 + 19 + 12}{2}$$

$$= \frac{52}{2}$$

$$= 26$$

مثلثی علاقہ ABD کا رقبہ

$$= \sqrt{26 (26 - 21) (26 - 19) (26 - 12)}$$

$$= \sqrt{26 \times 5 \times 7 \times 14} = \sqrt{12740}$$

= 112.87 (مُربّع سم تقریباً)

اگر BCD △ کے لیے اضلاع کی لمبائیوں کے مجموعہ کا نصف برابر S ہو تو

$$S = \frac{21 + 14 + 17}{2}$$

$$= \frac{52}{2}$$

$$= 26$$

مثلثی علاقہ BCD کا رقبہ

$$= \sqrt{26 (26 - 21) (26 - 14) (26 - 17)}$$

$$= \sqrt{26 \times 5 \times 12 \times 9}$$

$$= \sqrt{14040}$$

= 118.49 (مُربّع سم تقریباً)

چوکوروی علاقہ ABCD کا رقبہ

= 112.87 + 118.49

= 231.36 (مُربّع سم تقریباً)

مشق 9.6

1۔ چوکوروی علاقہ ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے اگر:

(i) $m\overline{AB} = 20$ cm, $m\overline{BC} = 25$ cm, $m\overline{CD} = 30$ cm,

$m\overline{DA} = 15$ cm, $m\overline{AC}$ 35 cm

(ii) m $\overline{AB}$ = 12 dm, m $\overline{BC}$ = 17 dm, m $\overline{CD}$ = 22 dm,
m $\overline{DA}$ = 25 dm, m $\overline{BD}$ = 31 dm

(iii) m $\overline{AB}$ = 20 dm, m $\overline{BC}$ = 17 dm, m $\overline{CD}$ = 22 dm
m $\overline{DA}$ = 25 dm, m $\overline{BD}$ = 31 dm

(iv) m $\overline{AB}$ = 2 m, m $\overline{BC}$ = 2.5 m, m $\overline{CD}$ = 3 m, m $\overline{DA}$ = 1.5 m,
m $\overline{AC}$ = 3.5 m

(v) m $\overline{AB}$ = 1.7 m, m $\overline{BC}$ = 1 m, m $\overline{CD}$ = 1.3 m,
m $\overline{DA}$ = 1.8 m, m $\overline{BD}$ = 2.1 m

باب 10

مخروط کی سطح اور حجم

10.1 مخروط

ساتویں جماعت میں ہم بیلن کے رقبہ اور حجم کے سوالات حل کر چکے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ گھی کا گول ڈبہ، رولر، گول ستون وغیرہ بیلن کی شکل کے ہوتے ہیں۔ اسی طرح بن تراشی ہوئی گول پنسل بیلن کی شکل کی ہوتی ہے۔ البتہ تراشی ہوئی گول پنسل کا تراشا ہؤا حصّہ مخروط شکل کا ہوتا ہے۔

فوجی خیمہ، گاجر اور مولی مخروط کی سی شکل رکھتے ہیں۔

مخروط کا قاعدہ ایک دائروی علاقہ ہوتا ہے۔ اسی لیے اسے دائروی مخروط کہتے ہیں۔

مخروط کی دو سطحیں ہوتی ہیں۔

ایک منحنی اور دوسری چپٹی۔ (دائروی علاقہ یا دائروی قاعدہ)

دائروی مخروط

مخروط

اس باب میں ہم مخروط کی سطح کا رقبہ اور اس کا حجم معلوم کرنے کا طریقہ سیکھیں گے۔

10.2 مخروط کی ترچھی بُلندی

قائمۃ الزاویہ شکل کی ایک آہنی چادر، جس کی سطح ہموار ہو، ریت پر اس طرح رکھیں کہ قائمے زاویے کا ایک بازو عمودی سمت اور دوسرا بازو اُفقی سمت میں ہو۔ پھر اسے عمودی بازو کے گرد گھمائیں ہم دیکھتے ہیں کہ ریت پر ایک مخروط شکل کا خلا پڑ گیا ہے۔

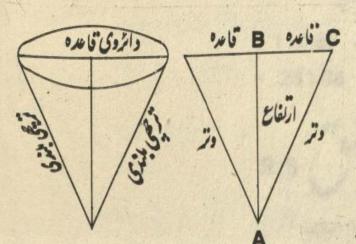
اب ہم مثلث قائمۃ الزاویہ اور مخروط کے چند اجزاء کے درمیان روابط کو دیکھتے ہیں مثلث ABC میں قاعدہ BC کی مقدار

مخروط کے قاعدہ کا رداس ہے۔
مثلث ABC میں عمود $\overline{AB}$ کی مقدار مخروط کا ارتفاع ہے۔
مثلث میں وتر $\overline{AC}$ کی مقدار مخروط کی ترچھی بلندی ہے۔ مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کی مقدار

$$= \sqrt{(\text{قاعدہ کی مقدار})^2 + (\text{عمود کی مقدار})^2}$$

$$\text{مخروط کی ترچھی بلندی} = \sqrt{(\text{قاعدہ کا رداس})^2 + (\text{عمود کی مقدار})^2}$$

10.3 مخروط کی سطح کا رقبہ

A
l
B
(I)

دائروی مخروط کا قاعدہ، ایک دائروی علاقہ ہوتا ہے۔ اس کی ترچھی سطح منحنی ہوتی ہے۔
فرض کیجیے ہمیں ایک ایسی مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرنا ہے جس کے قاعدے کا رداس r اور ارتفاع مائل (ترچھی بلندی) l ہے۔ اگر مخروط کو قینچی کی مدد سے نقطہ A (راس) سے B کی سیدھ میں کاٹنے کے بعد سیدھا کیا جائے تو ہمیں ایک قطعہ دائرہ ABC حاصل ہوگا۔ جس کا مرکز A اور رداس l ہوگا۔

A
B
C
(II)

اگر قطعہ دائرہ کی قوس BC کو بہت سے چھوٹے چھوٹے حصّوں میں تقسیم کر دیا جائے اور نقاط تقسیم کو قطعات خط کے ذریعے A سے ملایا جائے تو قطعہ دائرہ بہت چھوٹے چھوٹے مثلث نما علاقوں میں تقسیم ہو جائے گا۔ (شکل (II))
اب اگر ان مثلثی علاقوں کو کاٹ کر ایک دوسرے کے اُوپر اِس طرح رکھا جائے کہ

ایک کا راس اوپر اور دوسرے کا نیچے کی طرف ہو تو ہمیں ایک مستطیل نما علاقہ حاصل ہوگا۔ شکل (iii)

R Q

O P

(iii)

شکل (i) میں مخروط کے قاعدہ کا محیط

$= 2\pi r$

شکل (ii) میں قطعہ دائرہ کی قوس BC کی لمبائی۔

$= 2\pi r$

شکل (iii) میں مستطیل نما علاقہ کے ضلع $\overline{OP}$ کی لمبائی

= $2\pi r$ کا نصف

$= \pi r$

مستطیل کے ضلع PQ کی لمبائی = ℓ

مستطیل کا رقبہ = $\ell \times \pi r$

پس مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ = $\pi r \ell$

= π × (قاعدہ کا رداس) × ارتفاع مائل کی لمبائی

شکل (i) میں دائروی علاقے کا رقبہ

$= \pi r^2$

پس مخروط کی سطح کا کل رقبہ

= مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ + دائروی علاقے کا رقبہ

$= \pi r^2 + \pi r \ell$

$= \pi r (r - \ell)$

مثال :

مخروط کے قاعدہ کا رداس 7.5 سم اور ترچھی بلندی 14 سم ہے۔ اس کی منحنی سطح کا رقبہ بتایئے جبکہ

$$\left(\pi = \frac{22}{7} \right)$$

حل :

قاعدے کا رداس

$= r$

$= 7.5$ (سم)

ترچھی بلندی

$= \ell$

$= 14$ (سم)

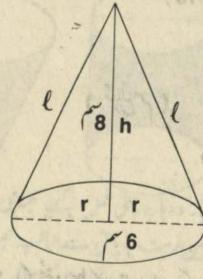
مُنحنی سطح کا رقبہ

$= \pi r \ell$

$= \frac{22}{7} \times \frac{75}{10} \times 14$

$= 330$ (مُربّع سم)

مثال 2 :

ایک مخروط کے قاعدہ کا رداس 6 سم اور ارتفاع 8 سم ہے مخروط کی مُنحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے نیز کل سطح کا رقبہ کتنا ہوگا ؟

حل :

مخروط کے قاعدہ کا رداس

$= r$

$= 6$ (سم)

ارتفاع

$= h$

$= 8$ (سم)

ترچھی بلندی

$\because \ell^2 = (r)^2 + (h)^2$

$= \ell$

$= \sqrt{(r)^2 + (h)^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{36 + 64}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$ (سم)

مُنحنی سطح کا رقبہ

$= \pi r \ell$

$= \frac{22}{7} \times 6 \times 10$

$= \frac{1320}{7}$

$= 188.57$ (مُربّع سم تقریباً)

کل سطح کا رقبہ

$= \pi r (\ell + r)$

$= \frac{22}{7} \times 6 \times (10 + 6)$

$= \frac{22}{7} \times 6 \times 16$

$= \frac{22}{7} \times 96$

$= 301.7$ (مُربّع سم)

مشق 10.1

مخروط کی مُنحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ ($\pi = \frac{22}{7}$) اور

1 - قاعدہ کا رداس 12 ڈیسی میٹر اور ترچھی بُلندی 28 ڈیسی میٹر ہے۔

2 - قاعدہ کا رداس 3.5 میٹر اور ترچھی بُلندی 5 میٹر ہے۔

3 - قاعدہ کا رداس 14 سینٹی میٹر اور ترچھی بُلندی 20 سینٹی میٹر ہے۔
4 - قاعدہ کا رداس 5 میٹر اور ارتفاع 12 میٹر ہے۔
5 - قاعدہ کا رداس 10 سم اور عمود 24 سم لمبا ہے۔
6 - قاعدہ کا رداس 4 سم اور ارتفاع 7.5 سم ہے۔
7 - لکڑی کے بنے ہوئے ایک مخروط کا رداس 3.5 سم ہے اور اس کی ترچھی بلندی 4 سم ہے۔ اس کی کل سطح کا رقبہ بتایئے۔
8 - ایک مخروطی مینار کے قاعدے کا قطر 56 میٹر لمبا ہے اور اس کی ترچھی بلندی کی مقدار 21 میٹر ہے۔ اس کی کل سطح پر 2.50 روپے فی مُربّع میٹر کے حساب سے پلستر کرانے کا خرچ معلوم کیجیے۔
9 - 9 سم تِرچھی بُلندی والی ایک قیف بنانے کے لیے ٹین کی کِتنی چادر دَرکار ہو گی۔ جبکہ قاعدے کے قطر کی لمبائی 8.4 سم ہو؟
10 - ایک مخروطی خیمہ 36 ڈیسی میٹر بُلند ہے اور اِس کے قاعدے کا رداس 105 سینٹی میٹر ہے اِسے بنانے پر کِتنا کینوس استعمال کیا گیا ہے۔

مخروط کا حَجَم

ایک کھوکھلا بیلن (جو ایک طرف سے کھُلا ہو) اور ایک کھوکھلا مخروط ایسے لیں جن کے قاعدے متماثل ہوں اور ان کا ارتفاع بھی ایک ہی ہو۔
مخروط کو ریت یا پانی سے بھر لیے اور پھر اس ریت یا پانی کو بیلن میں ڈال دیجیے۔ دوبارہ بھی عمل کیجیے تیسری مرتبہ پھر یہی عمل کیجیے ہم دیکھتے ہیں کہ تیسری مرتبہ بیلن ریت یا پانی سے لبالب بھر جاتا ہے۔ یعنی بیلن کو بھَرنے کے لیے مخروط کو تین دفعہ بھَر کر اُنڈیلنا ہو گا۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ

بیلن کا حجم = مخروط کے حَجم کا تین گنُا

مخروط کا حَجَم = (بیلن کا حَجَم) × $\frac{1}{3}$

ہم بیلن کے حجم کا کلیہ پڑھ چکے ہیں یعنی

بیلن کا حجم = $\pi r^2 h$

جبکہ بیلن کے قاعدے کا رداس ' r ' اور ارتفاع ' h ' ہے۔ اگر مخروط کے قاعدے کا رداس بھی r اور ارتفاع ' h ' ہو تو

مخروط کا حجم = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

مثال 1 :

ایک مخروط کے قاعدے کا رداس 15 میٹر اور ارتفاع 28 میٹر ہے مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔

حل :

قاعدے کا رداس

$= r$

$= 15$ (میٹر)

ارتفاع

$= h$

$= 28$ (میٹر)

مخروط کا حجم

$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (15)^2 \times 28$

$= 6600$ (مکعب میٹر)

مثال 2 :

ایک مخروطی مینار کے قاعدہ کا رداس 10 میٹر اور ارتفاع 42 میٹر ہے۔ اس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل :

مخروطی مینار کے قاعدہ کا رداس

$= r$

$= 10$ (میٹر)

مخروطی مینار کا ارتفاع

$= h$

$= 42$ (میٹر)

مخروطی مینار کا حجم

$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (10)^2 \times 42$

$= 4400$ (مکعب میٹر)

مشق 10.2

مخروط کا حجم معلوم کیجیے جبکہ ($\pi = \frac{22}{7}$) اور

1 - قاعدے کا رداس 5 میٹر اور ارتفاع 21 میٹر ہو۔

2 - قاعدے کا رداس 3.5 ڈیسی میٹر اور ارتفاع 6 ڈیسی میٹر ہو۔

3 - قاعدے کا رداس 2.1 سم اور عمود 7 سم لمبا ہو۔

4 - قاعدے کا رداس 15 سم اور عمود 2.8 سم لمبا ہو۔

5 - قاعدے کا قطر 20 سم لمبا اور ارتفاع 6.3 سم ہو

6 - ایک مخروطی مینار کے قاعدے کا قطر 16 میٹر لمبا اور ارتفاع 42 میٹر ہے اس کا حجم معلوم کیجیے۔

7 - ایک مخروطی مینار کے قاعدے کا رداس 21 میٹر اور ارتفاع 185 میٹر ہے اس مینار کو تعمیر کرنے میں کتنے مکعب میٹر مواد استعمال ہوا ہوگا۔

8 - ایک فوجی خیمہ مخروطی شکل کا ہے۔ اس کی بلندی 35 ڈیسی میٹر اور اس کے قاعدے کا قطر 42 ڈیسی میٹر لمبا ہے۔ اس خیمے میں 10 سپاہی سوتے ہیں بتایے ایک سپاہی کو اوسطاً کتنے مکعب ڈیسی میٹر ہوا ملے گی۔

9 - ایک مخروطی خیمہ 8.4 میٹر اونچا ہے اور اس کا قاعدہ 54 ڈیسی میٹر رداس کا ہے اگر ایک سکاؤٹ کو 5.832 مکعب میٹر ہوا درکار ہو تو اس خیمے میں کتنے سکاؤٹ رہ سکتے ہیں۔

10 - دھات کے بنے ہوئے ایک ٹھوس مخروط کے قاعدے کا قطر 5.6 سم لمبا ہے۔ اگر اس کی اونچائی 9 سم ہو تو اُس کا وزن معلوم کیجیے جبکہ ایک مکعب سم دھات کا وزن 0.5 ڈیکا گرام ہے۔

جوابات

مشق 1.1

1. (i) $\subseteq$ (ii) $\nsubseteq$ (iii) $\nsubseteq$ (iv) $\subseteq$ (v) $\subseteq$
2. (i) تحتی (ii) مختلف (iii) تحتی (iv) غیرواجب تحتی (v) مساوی
3. (i) $A \subseteq B$ (ii) $A \nsubseteq B$ (iii) $A \subseteq B$ (iv) $A \nsubseteq B$
4. (i) {4, 8, 12, 16} (ii) {-3, -1, 1, 3, 5}
   (iii) {2, 4, 6, 8, 10, 12} (iv) {0, 1, 2, 3, ...}
   (v) {3, 6, 9, 12, ...}
5. (i) { }, {1}, {3} (ii) { }, {0}, {4}
   (iii) { }, {1, 3}, {5, 7} (iv) { }, {4, 6}, {7, 8}
   (v) {2, 3}, {5, 7}, {7, 11} (ii), (iii), (iv) اور (v) کے اور بھی واجب تحتی سیٹ ہیں۔
6. (i) کوئی نہیں (ii) { } (iii) { }, {1}, {2}
   (iv) { }, {4}, {5}, {6}, {7}, {4, 5}, {4, 6} {4, 7}, {5, 6}, {5, 7}, {6, 7}, {4, 5, 6}, {4, 5, 7}, {4, 6, 7}, {5, 6, 7}
   (v) { }, {a}, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}
7. (i) Φ (ii) Φ, {1} (iii) { }, {5}
   (iv) { }, {-7} (v) { }, {-2}, {2}, {2, -2}
   (vi) { }, {4}, {16}, {4, 16} (vii) { }, {-3}, {9}, {-3, 9}
   (viii) Φ, {2}, {3}, {5}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}, {2, 3, 5}
   (ix) { }, {-4}, {-16}, {-64}, {-4, -16}, {-4, -64}, {-16, -64}, {-4, -16, -64}
   (x) { }, {-6}, {-4}, {-2}, {-6, -4}, {-6, -2}, {-4, -2}, {-6, -4, -2}
8. A = F, B = G, C = K, D = J

مشق 1.2

1. P (A) = { Φ }
2. P (B) = { Φ, {o} }

3- $P(C) = \{\Phi, \{2\}\}$

4- $P(D) = \{\Phi, \{1\}, \{4\}\{1,4\}\}$

5- $P(E) = \{\Phi, \{1\}, \{6\}, \{1,6\}\}$

6- $P(F) = \{\Phi, \{-1\}, \{1\}, \{-1,1\}\}$

7- $P(G) = \{\Phi, \{2\}, \{-2\}, \{2,-2\}\}$

8- $P(H) = \{\Phi, \{2\}, \{0\}, \{4\}, \{2,0\}, \{2,4\}, \{0,4\}, \{2,0,4\}\}$

9- $P(I) = \{\Phi, \{3\}, \{-3\}, \{5\}, \{3,-3\}, \{3,5\}, \{-3,5\}, \{3,-3,5\}\}$

10- $P(J) = \{\Phi, \{-1\}, \{-2\}, \{-3\}, \{-1,-2\}, \{-1,-3\}, \{-2,-3\},$
$\{-1,-2,-3\}\}$

-11 خالی سیٹ کا قوّت سیٹ = { Φ } پس خالی سیٹ کے قوّت سیٹ میں ایک رُکن " Φ " ہے لہٰذا خالی سیٹ کا قوّت سیٹ خالی سیٹ نہیں۔

مشق 1.3

1- (i) $A \cap B = \{1,3,5,7,9\}$, $B \cap A = \{1,3,5,7,9\}$

$A \cup B = \{1,2,3, \dots 10, 11, 13, \dots 19\}$

$B \cup A = \{1,2,3, \dots 10, 11, 13, \dots 19\}$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = \{4,8,12,16,20\}$

$B \cap A = \{4,8,12,16,20\}$

$A \cup B = \{2,4,6, \dots, 20, 24, 28, 32\}$

$B \cup A = \{2,4,6, \dots, 20, 24, 28, 32\}$

$A \cap B = B \cap A$ اور $A \cup B = B \cup A$

(iii) $A \cap B = \{0,2,4,6, \dots, 14\}$

$B \cap A = \{0,2,4,6, \dots, 14\}$

$A \cup B = \{0,1,2,3, \dots\dots, 16\}$

$B \cup A = \{0,1,2,3, \dots\dots, 16\}$

$A \cap B = B \cap A$ اور $A \cup B = B \cup A$

(iv) $A \cap B = \{2,3,5,7, \dots\dots\}$

$B \cap A = \{2,3,5,7, \dots\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4, \dots\}$

$B \cup A = \{1,2,3,4, \dots\}$

$A \cap B = B \cap A$ اور $A \cup B = B \cup A$

(v) $A \cap B = \{-1,-2,-3,-4, \dots\}$

$B \cap A = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$

$A \cup B = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$

$B \cup A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$

$A \cap B = B \cap A$ اور $A \cup B = B \cup A$

(vi) $A \cap B = \{0, 2, 4, 6, ...\}$

$B \cap A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$

$A \cup B = \{0, 1, \pm 2, 3, \pm 4, 5, \pm 6, ...\}$

$B \cup A = \{0, 1, \pm 2, 3, \pm 4, 5, \pm 6, ...\}$

$A \cap B = B \cap A$ اور $A \cup B = B \cup A$

2. (i) $C - D = \{-1, -3, -5, ..., -15\}$

$D - C = \{-2, -4, -6, ..., -16\}$

(ii) $C - D = \{3, 6, 9, 12, 18, 21, 24\}$

$D - C = \{5, 10, 20, 25, 30, 35\}$

(iii) $C - D = \{1, 4, 7, 13, 16, 19\}$

$D - C = \{2, 6, 14, 18, 22\}$

(iv) $C - D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

$D - C = \{\ \}$

(v) $C - D = \{\ \}$

$D - C = \{0, -1, -2, -3, ...\}$

(vi) $C - D = \{\ \}$

$D - C = \{-1, -3, -5, ...\}$

3. (i) $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, ... 12, 14, 16, 18\}$

$A - B = \{14, 16, 18\}$

$B - A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

(ii) $A \cap B = \{\ \}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, ..., 24\}$

$A - B = \{1, 3, 5, ..., 23\}$

$B - A = \{2, 4, 6, ..., 24\}$

(iii) $A \cap B = \{\ \}$, $A \cup B = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \pm 20\}$

$A - B = \{1, 2, 3, ..., 20\}$

$B - A = \{-1, -2, -3, ..., -20\}$

(iv) $A \cap B = \{3, 5, 7, 11, ...\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$

$A - B = \{1, 9, 15, 21, ...\}$

$B - A = \{2\}$

(v) $A \cap B = \{\ \}$, $A \cup B = \{1, \pm 2, 3, \pm 4, 5, \pm 6, ...\}$

$A - B = \{1, 2, 3, 4, ...\}$,

$B - A = \{-2, -4, -6, ...\}$

(vi) $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$

$A - B = \{\ \}$, $B - A = \{\ \}$

4- (i) $A' = \{10, 12, 14, ..., 40\}$

(ii) $B' = \{0, 2, 4, 6, 8, 22, 24, 26, ..., 40\}$

(iii) $C' = \{2, 6, 10, 14, ..., 38\}$

(iv) $D' = \{0, 4, 8, 12, 16, ... 28, 32, 34, 36, 38, 40\}$

(v) $E' = \{0, 2, 6, 8, 10, 14, 16, 18, 22, 24, 26, 30, 32, 34, 38, 40\}$

(vi) $F' = \{\ \}$

5 - $A' = \{0, 2, 4, 6, 8, ..., 50\}$

$B' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50\}$

$A' - B = \{0, 4, 6, 8, ..., 48, 50\}$

$A - B' = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., 47\}$

$A' \cup B' = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50\}$

$A \cap B' = \{1, 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39, 45, 49\}$

$A' \cap B' = \{0, 4, 6, 8, ..., 50\}$, $B' \cap A' = \{0, 4, 6, 8, ..., 50\}$

$(A \cup B)' = \{0, 4, 6, ..., 50\}$

$(A \cap B)' = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50\}$

6 - Φ کا کمپلیمنٹ سیٹ یونیورسل سیٹ ہوتا ہے۔

مشق 2.1

1- (i) $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ (ii) $\{+1, +2, +3, ...\}$

(iii) $\{-1, -2, -3, ...\}$ (iv) $\{+11, +12, +13, ...\}$

(v) $\{+101, +102, +103, ...\}$ (vi) $\{-1001, -1002, -1003, ...\}$

(vii) $\{-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$

(viii) $\{-7, -8, -9\}$

2. (vii) X' -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 X

(viii) X′ -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 X

3. (i) $>$ (ii) $>$ (iii) $>$ (iv) $<$
(v) $<$ (vi) $>$

4. (i) + 11 (ii) + 22 (iii) + 4 (iv) - 8
(v) - 5 (vi) + 14 (vii) - 5 (viii) - 13
(ix) - 12 (x) - 3 (xi) - 9 (xii) - 71
(xiii) + 100 (xiv) -150

5 - (i) + 11 (ii) 4 (iii) 18 (iv) - 5
(v) 18 (vi) - 113 (vii) - 7 (viii) + 10
(ix) - 150

6. (i) 0 (ii) 0 (iii) + 12 (iv) - 16 (v) - 24 (vi) - 35 (vii) - 108
(viii) - 143 (ix) - 1025 (x) + 28 (xi) + 150 (xii) + 162 (xiii) - 9
(xiv) + 10 (xv) - 5 (xvi) 0 (xvii) 0 (xviii) 0

7. (i) + 8 (ii) + 12 (iii) - 5 (iv) - 2 (v) - 8 (vi) - 9 (vii) - 9
(viii) - 32 (ix) - 12 (x) + 9 (xi) - 9 (xii) - 13
(xiii) + 15 (xiv) - 12 (xv) + 11 (xvi) 0 (xvii) 0 (xviii) + 10

8. (i) + 9 (ii) - 27 (iii) + 1 (iv) + 4 (v) - 11 (vi) - 3 (vii) + 20
(viii) - 10 (ix) - 29 (x) - 8 (xi) - 9 (xii) - 7 (xiii) - 10 (xiv) + 4

مشق 2.2

1. (i) درست (ii) درست (iii) غلط
(iv) غلط (v) درست (vi) غلط
(vii) درست (viii) درست (ix) غلط
(x) غلط (xi) غلط (xii) درست
(xiii) غلط (xiv) غلط

2. (i) ناطق عدد (ii) ناطق عدد (iii) غیر ناطق عدد
(iv) ناطق عدد (v) غیر ناطق عدد (vi) ناطق عدد
(vii) ناطق عدد (viii) ناطق عدد (ix) ناطق عدد
(x) غیر ناطق عدد (xi) غیر ناطق عدد (xii) ناطق عدد

(xiii) غیر ناطق عدد (xiv) ناطق عدد (xv) ناطق عدد

3. (i) غیر ناطق (ii) ناطق (iii) ناطق
(iv) ناطق (v) غیر ناطق (vi) غیر ناطق
(vii) ناطق

مشق 2.3

1. (i) $-1, 1$ (ii) 0, ضربی معکوس موجود نہیں (iii) $\frac{-11}{12}, \frac{12}{11}$
(iv) $\frac{5}{6}, \frac{-6}{5}$ (v) $\frac{16}{15}, -\frac{15}{16}$ (vi) $-\frac{100}{103}, \frac{103}{100}$
(vii) $+2\frac{5}{11}, -\frac{11}{27}$ (viii) $-25, \frac{1}{25}$

2. (i) خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع (ii) خاصیت تلازم بلحاظ جمع
(iii) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع (iv) تقسیم ۔ تفریق خاصیت
(v) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق (vi) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق
(vii) ضربی معکوس کا وجود (viii) جمعی معکوس کا وجود

3.

خاصیت	قدرتی اعداد کا سیٹ	مکمل اعداد کا سیٹ	صحیح اعداد کا سیٹ	ناطق اعداد کا سیٹ
بندش بلحاظ جمع	✓	✓	✓	✓
مبادلہ بلحاظ جمع	✓	✓	✓	✓
تلازم بلحاظ جمع	✓	✓	✓	✓
جمعی ذاتی عنصر کا وجود	×	✓	✓	✓
جمعی معکوس کا وجود	×	×	✓	✓
بندش بلحاظ ضرب	✓	✓	✓	✓
مبادلہ بلحاظ ضرب	✓	✓	✓	✓
تلازم بلحاظ ضرب	✓	✓	✓	✓
ضربی ذاتی عنصر کا وجود	✓	✓	✓	✓
ضربی معکوس کا وجود (سوائے صفر اگر موجود ہو)	×	×	×	✓
ضرب جمع خاصیت یا ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع	✓	✓	✓	✓

4. (i) $-\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{3}{10}$ (iii) $-\frac{4}{3}$
(iv) $\frac{1}{8}$ (v) $-\frac{3}{4}$ (vi) $-\frac{5}{12}$
(vii) $-\frac{7}{6}$ (viii) $\frac{6}{7}$ (ix) $-\frac{3}{8}$
(x) $\frac{13}{24}$ (xi) $-\frac{225}{32}$ (xii) $-\frac{16}{55}$

5. (i) نہیں رکھتا (ii) نہیں رکھتا (iii) رکھتا ہے ، نہیں رکھتا
(iv) ضربی معکوس (سوائے صفر کے) (v) 0, 1 (vi) 1
(vii)
(a) قدرتی اعداد کا سیٹ (b) صحیح اعداد کا سیٹ (c) مکمل اعداد کا سیٹ

مشق 3.1

1. (i) $13_{(5)}$ (ii) $30_{(5)}$ (iii) $232_{(5)}$
(iv) $414_{(5)}$ (v) $2122_{(5)}$ (vi) $12023_{(5)}$
(vii) $14414_{(5)}$ (viii) $130000_{(5)}$ (ix) $242313_{(5)}$

2. (i) $101_{(2)}$ (ii) $111_{(2)}$ (iii) $10011_{(2)}$
(iv) $11110_{(2)}$ (v) $1011001_{(2)}$ (vi) $1100100_{(2)}$
(vii) $10011110_{(2)}$ (viii) $1010011010_{(2)}$ (ix) $1111111111_{(2)}$

3. (i) 14 (ii) 15 (iii) 39 (iv) 2 (v) 5
(vi) 32 (vii) 124 (viii) 1875 (ix) 14650 (x) 170
(xi) 512 (xii) 4095

مشق 3.2

1. $12_{(5)}$ 2. $3_{(5)}$ 3. $40_{(5)}$ 4. $114_{(5)}$
5. $322_{(5)}$ 6. $1443_{(5)}$ 7. $1110_{(5)}$ 8. $4230_{(5)}$
9. $10444_{(5)}$ 10. $12341_{(5)}$ 11. $3_{(5)}$ 12. $11_{(5)}$
13. $4_{(5)}$ 14. $32_{(5)}$ 15. $132_{(5)}$ 16. $104_{(5)}$
17. $43_{(5)}$ 18. $202_{(5)}$ 19. $1014_{(5)}$ 20. $112_{(5)}$
21. $111_{(2)}$ 22. $1100_{(2)}$ 23. $100101_{(2)}$ 24. $100110110_{(2)}$
25. $1_{(2)}$ 26. $10_{(2)}$ 27. $11_{(2)}$ 28. $1110110_{(2)}$
29. $100000_{(2)}$ 30. $11111_{(2)}$ 31. $40_{(5)}$ 32. $43_{(5)}$

33.	422 (5)	34.	1222 (5)	35.	3	36.	6
37.	260	38.	51	39.	227	40.	8046

مشق 3.3

1.	13 (5)	2.	112 (5)	3.	2213 (5)
4.	3124 (5)	5.	2230 (5)	6.	12122 (5)
7.	220034 (5)	8.	203124 (5)	9.	110 (2)
10.	11110 (2)	11.	111111 (2)	12.	1110101 (2)
13.	1100101010 (2)	14.	101111001 (2)	15.	513
16.	1365	17.	9078	18.	40404

مشق 4.1

1- (i) 2:3 (ii) 10 : 3 (iii) 5 : 18 (iv) 135 : 143
(v) 4 : 9 (vi) 7 : 9 (vii) 4000 : 1 (viii) 500 : 3

2- (i) 1 : 100 (ii) 5 : 1 (iii) 50 : 163 (iv) 1 : 50
(v) 9 : 40 (vi) 10 : 3 (vii) 3 : 250 (viii) 1000 : 3
(ix) 3 : 400 (x) 36 : 875

3- (i) 25 : 21 (ii) 4 : 25

4- (i) 14 : 25 (ii) 1 : 2

5- (i) 3 : 4 (ii) 9 : 16

6-	10 : 9	7-	اکرم کا خرچ
8-	488 ڈیسی میٹر	9-	4.5 میٹر , 6 میٹر
10-	62.50 روپے	11-	438.75 روپے
12-	5.5 کوئنٹل	13-	50 منٹ
14-	60 کلو میٹر فی گھنٹا	15-	36 دن
16-	3 لاکھ روپے	17-	12 دن
18-	60 چکر	19-	600 ٹائلیں

مشق 4.2

1-	2880 روپے	2-	15 مربع ہیکٹو میٹر
3-	12 دن	4-	450 روپے

5-	$9\frac{1}{2}$ گھنٹے	6-	54 روپے	7-	16 دن
8-	35 دن	9-	5 گھنٹے	10-	7 ہیکٹو گرام
11-	250 آدمی	12-	5 آدمی	13-	15 آدمی
14-	9 گھنٹے				

مشق 4.3

1-	4:7:9	2-	11:13:17	3-	9:15:35
4-	4:15:23	5-	28:35:25	6-	45 : 80 : 108
7-	20 : 36 : 51	8-	60 : 69 : 71	9-	3:5:8
10-	6:11:18	11-	5:8: 11	12-	5:7:12

13- 60 : 105 : 168 : 308 14- 10 : 12 : 26 : 29

15- 33 : 36 : 46 : 47 16- 84, 147, 189

17- 300 , 200,120 18- 416, 312, 208

19- 384, 256, 192, 96

20- اسلم کا منافع = 409 روپے ، اشرف کا منافع = 818 روپے ،
اکرم کا منافع = 1227 روپے

21- جوّاد کا نفع = 1440 روپے ، نبیل کا نفع = 960 روپے

22 1080 روپے

23 9 اور 8 کی نسبت

24 ارشد کا نفع = 540 روپے، شاہد کا نفع = 675 روپے، عمر کا نفع = 1200 روپے

25 شازیہ کی رقم = 1000 روپے، مہوش کی رقم = 1200 روپے، ہما کی رقم = 1350 روپے

مشق 5.1

-1	1900 روپے	-2	4875 روپے	-3	3771.25 روپے
-4	30000 روپے	-5	51,000 روپے	-6	2500 روپے
-7	3200 روپے	-8	17100 روپے	-9	13200 روپے
-10	3762 روپے	-11	8000 روپے	-12	9000 روپے
-13	340000 روپے	-14	1,25,000 روپے		

مشق 5.2

1- 20 % نفع ، 10 % نقصان

2- 12 $\frac{1}{2}$ % نقصان

3- 10 % نفع

4 5 $\frac{5}{7}$ % نفع

5- (i) 535 روپے

(ii) 52742.50 روپے

(iii) 3601.80 روپے

(iv) 29353.80 روپے

6- (i) 8450 روپے

(ii) 55600 روپے

(iii) 42 201.50 روپے تقریباً

(iv) 57800 روپے

مشق (اعادہ) باب 6

1- $5x^2 + x + 1$

2- $a^2b + b^3$

3- $7m^3 + 3m^2 - 1$

4- $2y^2 + y + 4$

5- $4h^4 + 3h^3 + 5h - 10$

6- $x^2y + 5xy^2 - 4xyz$

7- $2x^3 - 6x^2 + 2x$

8- $a^3x^2 - 3ax^4 - 7a^2x^3 + 2a^5$

9- $4x^3 - 7y^2 + 12x - 7$

10- $-2y^5 + 2z^2 + 5$

11- $3a^3 - 4a^2 + 4a - 6$

12- صفر

13- $2x^3 - 7x^2 - x + 2$

14- $-10b^3 - 9b^2 + 13b + 6$

15- $x^4 - x^2 + 4x - 4$

16- $6k^4 - 11k^3 - 2k^2 + 4k + 1$

17- $5x^6 - 11x^5 + 21x^4 - 13x^3 + 19x^2 - 12x + 9$

18- $a^7 - 7a^6 + 21a^5 - 35a^4 + 35a^3 - 21a^2 + 7a - 1$

19- $x + 6$

20- $m + 13$

21- $4a + 3x$

22- $a^2 - a - 2$

23- $3m - 5$

24- $2a + 1$

25- $3x^2 + 2x - 4$

مشق 6.1

1- $5p - 3q$

2- $5a - b$

3- $-x$

4- $-12a^2 + 11b^2$

5- $7x - 3y - 3$

6- $a - 2b + 3c - 3d + 3e$

7- $p - 4q$　　8- $-98x + 415$　　9- $-a + 25$

10- $21x$

مشق 6.2

1- -3　　2- -69　　3- 77　　4- -29

5- -36　　6- 12　　7- $\frac{53}{6}$　　8- $\frac{169}{36}$

9- 4　　10- 67

مشق 6.3

1- $9a^2 + 30ab + 25b^2$　　2- $36b^2 + 84b + 49$

3- $9x^2 + 48xy + 64y^2$　　4- $4x^2 + 4 + \frac{1}{x^2}$

5- $\frac{4}{9}a^2 + ab + \frac{9}{16}b^2$　　6- $\frac{25}{36}a^2 + \frac{10}{9}ab + \frac{4}{9}b^2$

7- $25a^2 + 36ab + 13b^2$　　8- $29a^2 + 22ab + 10b^2$

9- $5x^2 + 26xy + 24y^2$　　10- $40x^2 + 22xy + 3y^2$

11- $34a^2 + 42ab + 13b^2$　　12- $48m^2 + 8mn - 16n^2$

13- (i) 11025　(ii) 8464　(iii) 252004
(iv) 162409　(v) 497025　(vi) 1004004
(vii) 42436　(viii) 6889

14- (i) $6ab$　(ii) $4ab$　(iii) $20ab$
(iv) 2　(v) $4b^2$　(vi) 9
(vii) 4　(viii) 49　(ix) 49
(x) $16a^2$

مشق 6.4

1- $49a^2 - 14ab + b^2$　　2- $25a^2 - 20ab + 4b^2$

3- $9x^2 - 42xy + 49y^2$　　4- $9x^2 - 2 + \frac{1}{9x^2}$

5- $9a^2 - 66ab + 121b^2$　　6- $\frac{25}{36}a^2 - \frac{5}{4}ab + \frac{9}{16}b^2$

7- $13a^2 - 36ab + 25b^2$　　8- $74a^2 - 68ab + 20b^2$

9- $170x^2 - 240xy + 90y^2$ 10- $27a^2 - 48ab + 21b^2$

11- $75x^2 - 70xy - 5y^2$ 12- $45x^2 + 96xy + 27y^2$

13- $128a^2 - 224ab + 96b^2$ 14- $77x^2 - 110xy$

15- 2304 16- 9409 17- 996004

18- 3984016 19- 15444 9 20- 354025

21- (i) 8ab (ii) 30ab (iii) 10ac (iv) 2ab

(v) $25b^2$ (vi) $9y^2$ (vii) $\frac{4}{9}a^2$ (viii) $\frac{a^2}{4}$

(ix) $81a^2$ (x) b^2

مشق 6.5

1- (i) 10 (ii) 60 (iii) 33 (iv) 33 (v) 65 (vi) 53

2- (i) 85 (ii) 56 (iii) 72

3- (i) 4 (ii) 57 (iii) 21 (iv) 89

4- (i) 34 (ii) 98 (iii) 198 (iv) 83 (v) 287 (vi) 171

5- (i) 194 (ii) 34 (iii) 1442 (iv) 47

6- (i) 5 (ii) 9 (iii) 13

مشق 6.6

1- (i) $a^2 - 4b^2$ (ii) $9x^2 - 4y^2$ (iii) $a^4 - b^4$ (iv) $5 - 2 = 3$ (v) $7a^2 - 3b^2$ (vi) $9x^4 - 4y^6$

2- (i) $a^4 - 16b^4$ (ii) $81x^4 - 16y^4$ (iii) $a^4 - b^4$ (iv) $256a^8 - b^8$

3- (i) 5 (ii) 12 (iii) 74 (iv) 15 (v) 3.99

4- (i) 9996 (ii) 3584 (iii) 19575 (iv) 0.9996

مشق 6.7

1- (i) $x^2 + 14x + 33$ (ii) $x^2 + 18x + 45$

(iii) $x^2 + 3x - 40$ (iv) $x^2 + 10x - 39$

(v) $8x^2 + 28x + 24$ (vi) $56x^2 - 61x - 22$

(vii) $bxn^2 + (bp + mx)n + mp$
(viii) $30x^2 + 37x - 7$
(ix) $169x^2 - 78x + 8$
(x) $9x^2 - 33x + 30$

2- (i) $2x^2 + 14x + 23$
(ii) $2x^2 + 25x + 47$
(iii) $-16x + 38$
(iv) $-x - 21$
(v) $4x - 4$
(vi) $2a^2 + 3a - 143$
(vii) $-5a + 199$
(viii) $4x^2 + 10x + 26$
(ix) $44x^2 + 60x - 17$
(x) $7x^2 - 30x + 1$
(xi) $106x^2 + 30x + 58$
(xii) $25x^2 - 46x + 19$

مشق 6.8

1- $2(a^2 - 2)$
2- $a(a + x)$
3- $a^2(a - 2)$
4- $x^2(x + b)$
5- $3x(x - 2a)$
6- $p^2(1 + 2q)$
7- $y(y + x)$
8- $xyz(xyz + 3)$
9- $a(2a^2 - a + 1)$
10- $3a^2(a + 2x - 1)$
11- $7(x^2 - x + 2)$
12- $2b^2(2b^3 + 3a^2b - 1)$
13- $xy(x^2y^2 - xy + 2)$
14- $13xy(x - 1)(2x - 1)$
15- $ab(abc^2 + c + 1)$
16- $3ay(ay^2 + 3a^3 - 2)$

مشق 6.9

1- $(a + d)(b + c)$
2- $(c - d)(a + b)$
3- $(x - a)(x + b)$
4- $(a + c)(a + 4)$
5- $(a - b)(3 - a)$
6- $(a - y)(b - y)$
7- $(p + r)(q - r)$
8- $(a - b)(c^2 - 2)$
9- $(2x + 3)(x^2 + 1)$
10- $(a + 2)(ax - by)$
11- $(xy - z)(a + bc)$
12- $(3a - b)(4a - x^2)$

مشق 6.10

1- $(a + 3)^2$
2- $(b + 4)^2$
3- $(3a + 4b)^2$
4- $(a - 4)^2$

5- $(a - e)^2$ 6- $(5a - 3d)^2$ 7- $(5x + 8)^2$ 8- $(1 + 4abc)^2$

9- $(4ab - 3c)^2$ 10- $(\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b)^2$ 11- $(\frac{2}{3}a - \frac{4}{5}b)^2$

12- $(\frac{3}{4}c + \frac{4}{3}d)^2$ 13- $(\frac{3}{5}a - b)^2$ 14- $(2a - 7c)^2$

15- $(5x - 3y)^2$ 16- $(7x + 6y)^2$ 17- $2(3x - 7y)^2$

18- $5(2x - 3y)^2$ 19- $(6x + 10y)^2$ 20- $3(9x - 1)^2$

مشق 6.11

1- $(x + 5)(x - 5)$
2- $(8 + x)(8 - x)$
3- $(3y + 7x)(3y - 7x)$
4- $(2a + 9)(2a - 9)$
5- $(x + 8y)(x - 8y)$
6- $(9x + 11y)(9x - 11y)$
7- $(ab + 4cd)(ab - 4cd)$
8- $(2a + b + 3c)(2a + b - 3c)$
9- $(5 + 3a - 2b)(5 - 3a + 2b)$
10- $(8a + 7b + d)(8a - 7b - d)$
11- $(5a - 6b)(a - 4b)$
12- $(9a + b)(a + 9b)$
13- $5(18a - 17b)(2a - 5b)$
14- $(17c + d)(c + 17d)$
15- $4(11x - 4y)(4x - 11y)$
16- $(x - y + a + b)(x - y - a - b)$
17- $(c - d + 2x + 2y)(c - d - 2x - 2y)$
18- $9(2x + 2y + 3c - 3d)(2x + 2y - 3c + 3d)$
19- $15(a + b + 2c + 2d)(a + b - 2c - 2d)$
20- $16(2x + 2y + a - b)(2x + 2y - a + b)$

مشق 6.12

1- $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$
2- $(a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$
3- $(2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)$
4- $(9a^2 + 12ab + 8b^2)(9a^2 - 12ab + 8b^2)$
5- $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)(a^4 - a^2 + 1)$
6- $(2a^2 + 2ab + 3b^2)(2a^2 - 2ab + 3b^2)$

7- $(3a^2 + 4ab + 5b^2)(3a^2 - 4ab + 5b^2)$

8- $(x^2 + 2xy + 5y^2)(x^2 - 2xy + 5y^2)$

9- $(a^2 + 4a + 8)(a^2 - 4a + 8)$

10- $(x^2 + 3xy + 4y^2)(x^2 - 3xy + 4y^2)$

11- $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$

12- $(c + d + 2a - b)(c + d - 2a + b)$

13- $(3x + y + c - d)(3x + y - c + d)$

14- $(x - y + 2a + d)(x - y - 2a - d)$

15- $(\ell - 4m + 2x - y)(\ell - 4m - 2x + y)$

16- 177　　17- 2　　18- .086

19- 57　　20- 85

مشق 6.13

1- $(a + 2)(2a + 1)$　　2- $(x + 3)(3x + 1)$

3- $(x + 2)(2x + 5)$　　4- $(a + 2)(3a - 1)$

5- $(a + 3)(2a - 1)$　　6- $(x + 1)(3x - 2)$

7- $(x - 3)(3x + 2)$　　8- $(x + 5)(2x - 1)$

9- $(x + 2)(4x - 3)$　　10- $(2x - 3)(2x + 1)$

11- $(2y - 3)(3y + 1)$　　12- $(2x - 5y)(2x + y)$

13- $(3x - 2y)(2x - y)$　　14- $(a - 2b)(6a - b)$

15- $(2a - 5b)(2a + b)$　　16- $(2x - 3y)(3x + 2y)$

17- $(4x - 3y)(3x - 2y)$　　18- $(x + 6y)(6x - y)$

19- $4(2a - 3)(a + 2)$　　20- $3(2x + 5)(3x - 2)$

مشق 7.1

1- $\{\frac{2}{3}\}$　　2- $\{3\}$　　3- $\{3\}$

4- $\{10\}$　　5- $\{5\frac{1}{6}\}$　　6- $\{11\}$

7- $\{-\frac{4}{13}\}$ 8- $\{29\}$ 9- $\{3\frac{13}{16}\}$

10- $\{6\frac{1}{2}\}$ 11- $\{8\}$ 12- $\{3\frac{5}{21}\}$

13- $\{2\}$ 14- $\{2\}$ 15- $\{2\}$

16- $\{-3\}$ 17- $\{13\}$ 18- $\{0\}$

19- $\{3\}$ 20- $\{.6\}$ 21- $\{.5\}$

22- $\{5.32\}$ 23- $\{20\}$ 24- $\{-3.9\}$

25- $\{13\frac{6}{7}\}$

مشق 7.2

1- 47,63 2- 63,64 3- 81,83

4- 162 5- 120 6- 10 میٹر, 20 میٹر

7- 30 میٹر, 10 میٹر 8- 12

9- 50 طلبہ, 238 روپے 10- 810

11- 539, 540, 541 12- 51, 52, 53, 54

13- 9 سال 14- ناصرہ کی عمر = 45 سال، اسلم کی عمر = 15 سال

15- 6 دن 16- $\frac{35}{37}$ 17- $\frac{15}{30}$

18- 200 مالٹے 19- ناصر = 23 روپے، عمر = 30 روپے، عون = 27 روپے

20- 73 21- 47 22- 2400 روپے

مشق 8.1

1۔ (i) اگر مکمل مُربع مجذور میں ہندسوں کی تعداد طاق ہو تو جذر میں ہندسوں کی تعداد، مجذور کے ہندسوں میں '1' جمع کرنے کے بعد 2 پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(ii) اگر مکمل مُربع مجذور میں ہندسوں کی تعداد جفت ہو تو جذر میں ہندسوں کی تعداد،

مجذور میں ہندسوں کی تعداد کو 2 پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

2-	(i)	4	(ii)	4	(iii)	7
	(iv)	6	(v)	5	(vi)	6
3-	(i)	3	(ii)	4	(iii)	2
	(iv)	4	(v)	5		
4-	(i)	$\overline{6}\ \overline{76}$	(ii)	$\overline{56}\ \overline{25}$	(iii)	$\overline{5}\ \overline{56}\ \overline{96}$
	(iv)	$\overline{51}\ \overline{98}\ \overline{41}$	(v)	$\overline{36}\ \overline{96}\ \overline{64}$	(vi)	$\overline{4}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	(vii)	$\overline{6}\ \overline{45}\ \overline{16}$				

مشق 8.2

1-	36	2-	55	3-	67
4-	27	5-	29	6-	69
7-	58	8-	64	9-	75
10-	86	11-	95	12-	99

مشق 8.3

1-	128	2-	234	3-	205
4-	347	5-	368	6-	480
7-	560	8-	409	9-	587
10-	306	11-	632	12-	407
13-	1234	14-	2054	15-	3548
16-	3247	17-	4211	18-	4563

مشق 8.4

1-	0 .3	2-	0 .21	3-	0 .4
4-	0 .26	5-	0 .57	6-	0 .258
7-	26.98	8-	37.45	9-	54.6
10-	87.256	11-	90.405	12-	0.51
13-	0.60	14-	25.59	15-	31.43
16-	97.85	17-	60.82	18-	0.752
19-	0.598	20-	7.953	21-	31.421
22-	76.659				

مشق 8.5

1- (i) $\frac{5}{6}$ (ii) $\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{2}$

(iv) $1\frac{5}{7}$ (v) $2\frac{3}{8}$ (vi) $5\frac{1}{6}$

(vii) $6\frac{3}{8}$ (viii) $10\frac{7}{10}$

2- (i) 0.93 (ii) 1.70 (iii) 1.85

(iv) 3.47 (v) 5.67 (vi) 6.36

3- (i) 0.953 (ii) 0.722 (iii) 1.374

(iv) 1.571 (v) 2.169 (vi) 3.958

مشق 8.6

1- 635 میٹر   2- 312 میٹر   3- 350 میٹر

4- 61.5 میٹر تقریباً   5- 7 ڈیسی میٹر   6 90 میٹر

-7 125 پودے ، 125 قطاریں -8 503 پودے

-9 187 -10 187 -11 25 -12 110

مشق 9.1

1- (i) 10 سم (ii) 13 سم (iii) 25 سم

2- (i) 3 سم (ii) 12 سم (iii) 16 سم

3- (i) 8 سم (ii) 1.6 سم (iii) 11.49 سم تقریباً

4- 20 میٹر 5- 16 میٹر 6- 30 میٹر

7- 5.66 سم تقریباً 8- 2.65 میٹر تقریباً

9- 24.25 سم تقریباً

مشق 9.5

-1 (i) 146.97 مُربّع سم تقریباً

(ii) 600 مُربّع سم

(iii) 932.42 مُربّع ڈیسی میٹر تقریباً

(iv) 1800 مُربّع ڈیکا میٹر

(v) 1816.90 مُربّع ہیکٹو میٹر تقریباً

(vi) 5663.12 مُربّع ڈیسی میٹر تقریباً

(vii) 7230.79 مُربّع ڈیسی میٹر تقریباً

(viii) 12762.83 مُربّع میٹر تقریباً

مشق 9.6

1۔ (i) 468.56 مُربّع سم تقریباً
(ii) 323.11 مُربّع ڈیسی میٹر تقریباً
(iii) 430.49 مُربّع ڈیسی میٹر تقریباً
(iv) 4.69 مُربّع میٹر تقریباً
(v) 1.96 مُربّع میٹر تقریباً

مشق 10.1

1۔ 1056 مُربّع ڈیسی میٹر
2۔ 55 مُربّع میٹر
3۔ 880 مُربّع سینٹی میٹر
4۔ 204.3 مُربّع میٹر تقریباً
5۔ 817.14 مُربّع سینٹی میٹر تقریباً
6۔ 106.9 مُربّع سینٹی میٹر تقریباً
7۔ 82.5 مُربّع سینٹی میٹر
8۔ 4620 روپے
9۔ 118.8 مُربّع سینٹی میٹر
10۔ 1237.5 مُربّع ڈیسی میٹر

مشق 10.2

1۔ 550 مکعب میٹر
2۔ 77 مکعب ڈیسی میٹر

3۔ 32.34 مکعب سینٹی میٹر

4۔ 660 مکعب سینٹی میٹر

5۔ 660 مکعب سینٹی میٹر

6۔ 2816 مکعب میٹر

7۔ 85470 مکعب میٹر

8۔ 1617 مکعب ڈیسی میٹر

9۔ 44 سکاؤٹ

10۔ 36.96 ڈیکاگرام

درخت لگائیں
بخت جگائیں

تیار کردہ:۔ پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ، لاہور

منظور کردہ و نظرثانی شدہ:۔

قومی ریویو کمیٹی وفاقی وزارت تعلیم حکومت پاکستان اسلام آباد

بمطابق مراسلہ نمبر F 3-9/ 83 MATHS مورخہ 18 نومبر 1987

قومی ترانہ

پاک سرزمین شاد باد — کشورِ حسین شاد باد
تو نشانِ عزمِ عالی شان — ارضِ پاکستان
مرکزِ یقین شاد باد

پاک سرزمین کا نظام — قوتِ اخوتِ عوام
قوم، ملک، سلطنت — پائندہ تابندہ باد
شاد باد منزلِ مراد

پرچمِ ستارہ و ہلال — رہبرِ ترقی و کمال
ترجمانِ ماضی شانِ حال — جانِ استقبال
سایۂ خدائے ذوالجلال

11517
سیریل نمبر

قیمت	تعداد اشاعت	طباعت	ایڈیشن	تاریخ اشاعت
13 . 25	33 ,000	ششم	اوّل	جنوری 1991